Ejercicios: Mecánica Cuántica I (maestría)

Olivier Sarbach
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

9 de noviembre 2006

Problema 11

Considere un sistema cuántico bidimensional, $X = \mathbb{C}^2$. Consideramos sobre X el operador espín

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3),$$

donde σ_1, σ_2, σ_3 son las matrices de Pauli definidas por

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

El Hamiltoniano $H : X \to X$ sea definido por

$$H = -\mu \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = -\frac{\mu}{2} \begin{pmatrix} B_z & B_x - iB_y \\ B_x + iB_y & -B_z \end{pmatrix},$$

donde $\mu \neq 0$ y $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z) \neq (0, 0, 0)$.

(a) Determine los autovalores $\lambda_\pm$ de H y calcule la descomposición espectral

$$H = \lambda_- P_- + \lambda_+ P_+$$

de H, donde $P_\pm$ son los proyectores ortogonales sobre los autoespacios correspondientes a $\lambda_\pm$.

(b) Calcule la medida espectral $E(f)$ correspondiente a H.

(c) El estado inicial del sistema sea dado por $\psi_0 = (1, 0)$. Calcule el estado $\psi(t)$ del sistema al tiempo $t \in \mathbb{R}$.

(d) Determine la probabilidad que el sistema se encuentre en el estado $(0, 1)$ al tiempo t.

(e) Determine el valor esperado $< \mathbf{S} >_{[\psi(t)]}$ de $\mathbf{S}$ al tiempo t.

Problema 12

Sean $X = L^2(\mathbb{R}^3)$ y $A : D(A) \subset X \to X$ el operador lineal definido por

$$D(A) = C_0^\infty(\mathbb{R}^3), \qquad (Au)(\mathbf{u}) = [-\Delta + V(\mathbf{x})]\, u(\mathbf{x}), \quad u \in D(A), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,$$

donde $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es un potencial continuo y acotado.

(a) Muestre que A es un operador simétrico.

(b) Muestre que A no es continuo.

Problema 13

Sea X un espacio de Hilbert complejo, y sean $P : D(P) \subset X \to X$ y $Q : D(Q) \subset X \to X$ operadores lineales autoadjuntos que satisfacen las relaciones de conmutación canónicas

$$[P, Q]u = \frac{1}{i}u \tag{1}$$

para todos u en un subespacio apropriado denso de X. Muestre que P y Q no pueden ser acotados los dos:

(a) Asuma que P y Q satisfacen (1) y son operadores acotados, y encuentre las relaciones

$$[P, Q^n] = \frac{n}{i}Q^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

(b) Encuentre que $2\|P\|\|Q\| \geq n$ y llegue a una contradicción.