

Geometría no conmutativa y espaciotiempo cuántico

Resultados recientes de la teoría de cuerdas sugieren los primeros modelos de la estructura cuántica del espacio y el tiempo matemáticamente consistentes

José Fernández Barbón

Curiosamente, la primera teoría relativista de la historia data de 1864, cuando James Clerk Maxwell escribió sus famosas ecuaciones del electromagnetismo. En la teoría de Maxwell la luz se interpreta como una onda del campo electromagnético. Lo sorprendente es que la velocidad de propagación de estas ondas es una constante, independiente del estado de movimiento del observador. Por supuesto, esta predicción se halla en contradicción directa con la mecánica newtoniana, según la cual la velocidad de cualquier cosa que recibamos será mayor si nos acercamos a la fuente, y menor si nos alejamos de ésta. Se comprende así por qué la paulatina verificación experimental de la teoría de Maxwell acabó conduciendo a una profunda crisis teórica.

En esencia, lo que hizo Einstein en 1905 fue resolver el dilema a favor de Maxwell mediante la construcción de una mecánica que fuera compatible con el extraño comportamiento de la luz. Queda entonces claro que la velocidad de la luz es un límite: si la velocidad de la luz, c , es siempre la misma, no parece posible “perseguir” un rayo de luz, y mucho menos “adelantarlo”. En realidad, tales situaciones son imposibles porque en la teoría de Einstein la inercia de un objeto (su resistencia a la aceleración) aumenta con la velocidad, haciéndose infinita cuando alcanza la velocidad de la luz. Es decir, hace falta una energía infinita para dar alcance a un rayo de luz.

Para velocidades pequeñas en comparación con la de la luz (lo que, matemáticamente, viene a ser como tomar un valor infinito de c) las fórmulas de Einstein aproximan las de la mecánica newtoniana. Sin embargo, a velocidades cercanas al límite se hacen evidentes todas las predicciones sorprendentes de la relatividad especial, tales como la contracción longitudinal de los objetos en la dirección de movimiento, la ralentización de los relojes móviles o la famosa equivalencia entre masa y energía: $E = mc^2$.

Desde el punto de vista matemático el espacio y tiempo absolutos de Newton quedan fusionados en una nueva entidad denominada *espaciotiempo*, introducida por Hermann Minkowski en 1908. El espaciotiempo de Minkowski tiene cuatro dimensiones, las tres dimensiones espaciales ordinarias más el tiempo. Aunque es geoméricamente “plano”, matemáticamente resulta peculiar, puesto que el tiempo se comporta como si fuese una coordenada espacial, pero con valores en los números imaginarios. En cualquier caso, la relatividad especial, con el espacio de Minkowski sirviendo de “escenario” pasivo, comparte con la teoría newtoniana el carácter *a priori* del espaciotiempo. Pero la relatividad espacial no tiene en cuenta los efectos de la gravitación, como si la constante G de Newton, que determina su intensidad, fuese nula. La segunda parte de la revolución einsteiniana consistió en combinar c y G en una teoría única, la teoría de la relatividad general de 1915. En ella, el espaciotiempo

deja de ser pasivo, adquiere carácter dinámico; el efecto de la gravitación equivale a la *curvatura* del espaciotiempo de Minkowski

Ya en el siglo XIX, los matemáticos se dieron cuenta de que la geometría de los espacios con curvatura difiere de la geometría euclidiana. Un ejemplo sencillo de espacio con curvatura en dos dimensiones es la superficie de una esfera. De modo análogo, es perfectamente concebible que el mundo físico tridimensional aparezca “curvado” cuando se lo imagina inmerso en un espacio de dimensión superior. Esta intuición llevó a notables matemáticos del siglo XIX, como Gauss o Riemann, a proponer que la geometría es una propiedad física que ha de ser determinada experimentalmente. Fue Einstein el que realizó esta idea de forma concreta, con la premisa de que el espaciotiempo adquiere curvatura en presencia de masas materiales con distribuciones dadas de energía, de acuerdo con un conjunto de ecuaciones de la forma:

$$\text{CURVATURA} = G \times \text{DENSIDAD DE ENERGÍA}$$

Estas ecuaciones nos dicen que la constante de Newton, G , mide la “rigidez” del propio espaciotiempo, es decir, su resistencia a ser curvado por la presencia de energía (en particular, materia). Cuando la densidad de energía es pequeña, que corresponde a campos gravitacionales débiles o a movimientos lentos en comparación con la velocidad de la luz, las ecuaciones de Einstein aproximan la ley de Newton, con pequeñas desviaciones que constituyen los tests clásicos de la relatividad general (el desplazamiento del perihelio de Mercurio o la curvatura de la luz en torno al Sol). Las ecuaciones de Einstein predicen además fenómenos cualitativamente nuevos, tales como las ondas gravitacionales, los agujeros negros o la propia expansión del universo.

Una de las nociones familiares de la mecánica celeste es la de “velocidad de escape” de un campo gravitacional, definida como la velocidad mínima necesaria para que un satélite no quede atrapado en nin-

guna órbita cerrada. Por ejemplo, para el caso de las sondas espaciales *Voyager* que se alejan hasta la parte exterior del sistema solar, la velocidad de escape es de unos 11 kilómetros por segundo. Pues bien, la noción de velocidad de escape sigue siendo válida en la teoría relativista, y su consecuencia más sorprendente es que una masa M comprimida en una esfera de radio inferior a un cierto valor crítico, $R_s = 2GM/c^2$, tendría una velocidad de escape superior a la velocidad de la luz. Esto significa que nada, ni siquiera la propia luz, podría escapar del campo gravitacional de esta masa, justificando el nombre de “agujero negro”. El radio crítico R_s , denominado radio de Schwarzschild, representa una superficie de no retorno (llamada *horizonte de sucesos*) ya que, una vez atravesada, es imposible salir de nuevo al exterior. Para hacernos una idea, el radio de Schwarzschild del Sol tiene unos pocos kilómetros. Si toda la masa del Sol se comprimiera por debajo de este radio crítico, la curvatura del espaciotiempo en la vecindad del Sol sería tal, que se convertiría en un agujero negro.

Los agujeros negros no son sólo soluciones exóticas de las ecuaciones de Einstein. Su existencia como objetos astrofísicos asociados a fuentes de rayos X o a los centros de las galaxias está prácticamente aceptada por la comunidad científica. Como veremos, también resultan cruciales en las especulaciones teóricas sobre la teoría cuántica de la gravitación.

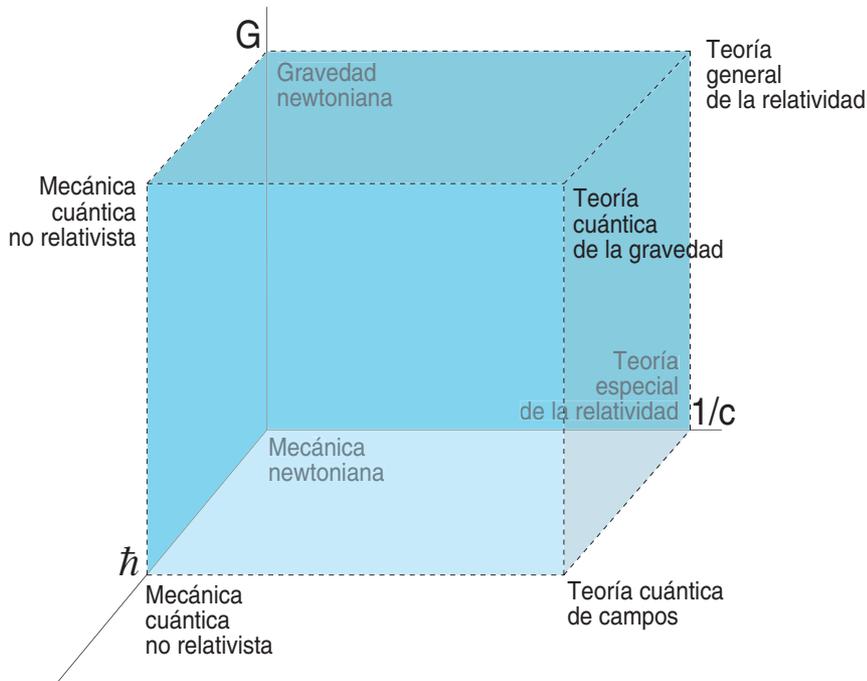
El espaciotiempo a través del microscopio cuántico

La revolución cuántica fue conceptualmente más radical. Así como la velocidad de la luz controla la estructura del espacio y del tiempo en la relatividad, otra constante universal, \hbar , establece otro límite físico infranqueable y dicta el comportamiento de la materia a escala atómica. Representa la acción mínima posible. La *acción* (una magnitud física menos familiar que la velocidad) es el producto de la energía de un cierto proceso físico por el tiempo característico en el que esa energía es liberada. La constante de Planck es, más o menos, la ac-

ción típica de un electrón en una órbita atómica. Un fenómeno será clásico cuando su acción resulte mucho mayor que \hbar ($\hbar \rightarrow 0$)

La naturaleza de \hbar está ligada a un carácter fundamentalmente “difuso” de las partículas subatómicas. Resulta que la idealización matemática de una partícula como un punto que sigue una trayectoria bien definida es inadecuada cuando la acción de esa trayectoria es del orden de \hbar . Es más adecuado imaginar, siguiendo a Feynman, que las partículas cuánticas siguen todas las trayectorias posibles simultáneamente. El movimiento es, al pie de la letra, un promedio entre todas las posibilidades, cada una con un cierto peso estadístico. Esta caracterización del movimiento de las partículas cuánticas se puede elevar a la categoría de principio fundamental de la mecánica cuántica: cuando un proceso se puede realizar a través de varias “historias” alternativas, las leyes de la mecánica cuántica determinan la probabilidad de que ocurra el proceso mediante un promedio adecuado de todas las posibilidades.

Una medida cuantitativa del grado de “fluctuación” de las trayectorias viene dada por la relación de indeterminación de Heisenberg. De acuerdo con este resultado fundamental, el producto de las indeterminaciones en posición, ΔX , y en impulso, ΔP , de una partícula ha de ser mayor que la constante de Planck. En fórmulas: $\Delta X \times \Delta P \geq \hbar/2$, donde el impulso está definido como el producto de la masa por la velocidad, $P = m \times v$. Para definir una trayectoria con exactitud es necesario especificar la posición y velocidad de la partícula en un momento dado, pero esto es imposible, ya que la precisión absoluta de la posición, $\Delta X \rightarrow 0$, implica una incertidumbre total en la velocidad, $\Delta P \rightarrow \infty$, y viceversa. Desde el punto de vista pragmático, la consecuencia más importante de las relaciones de Heisenberg es que los microscopios cuánticos cuestan mucha energía. En efecto, para estudiar un sistema físico con una precisión espacial de orden ΔX , hace falta comunicar un impulso de orden $\hbar/\Delta X$ a esa región del espacio. Como el impulso cuesta energía, se explica así por qué son



1. EL MAPA DE LAS TEORÍAS FÍSICAS, según como aparezcan en ellas las tres constantes fundamentales G , \hbar , c : con su valor real o con su límite nulo o infinito. La síntesis final, una teoría de los fenómenos físicos válida para los valores finitos de c , \hbar y G sin tener que tomar límites simplificadoros, una teoría cuántica de la gravitación, que recuperaría las demás teorías parciales como límites particulares, sigue representando la frontera de la investigación.

necesarios aceleradores cada vez más energéticos para estudiar distancias cada vez más diminutas.

Las relaciones de Heisenberg son la expresión gráfica de la estructura matemática de la mecánica cuántica. Estas matemáticas, un tanto exóticas, se basan en que la posición y el impulso no son números ordinarios, sino objetos denominados *matrices*. La característica definitoria de las matrices es que, al multiplicarlas, el orden de los factores *si altera* el producto. Es lo que se denomina una multiplicación “no conmutativa”. En símbolos: $X \times P$ no es lo mismo que $P \times X$ en el mundo cuántico, donde $\hbar \neq 0$. Es decir, la limitación física impuesta por la existencia de \hbar está asociada a una no conmutatividad fundamental entre posiciones y velocidades.

El intento de aplicar las leyes de la mecánica cuántica a partículas relativistas (con velocidades próximas a c) lleva directamente a la teoría cuántica de campos. La novedad principal de la teoría cuántica de campos es que trata de *colectivos* de partículas, de forma que las partículas individuales pueden crearse

y destruirse localmente. Según la ecuación de Einstein, $E = mc^2$, la energía “condensada” en forma de masa no es diferente en esencia de otras formas de energía. Así que la energía de movimiento de partículas suficientemente rápidas puede condensarse en forma de otras partículas con masa, y viceversa; una partícula pesada puede donar su energía de reposo desintegrándose espontáneamente en otras partículas. El principio fundamental de la mecánica cuántica nos dice que debemos promediar sobre todas las alternativas posibles en la historia de un proceso dado. Por ejemplo, si una partícula A se puede desintegrar en otras partículas B y C , que a su vez se pueden aniquilar mutuamente y crear A , este proceso $A \rightarrow B + C \rightarrow A$ sucederá con una cierta probabilidad como “historia intermedia”.

En un sentido operacional, las relaciones de Heisenberg siguen siendo ciertas en el caso relativista, de forma que ΔX y ΔP todavía representan la precisión en la medida de posición y de impulso, aunque esta medida no involucre necesari-

amente una sola partícula. Lo que parece una trayectoria fluctuante de una sola partícula cuando se analiza con un “microscopio” de baja resolución espacial (es decir, con un acelerador de partículas de baja energía), se vuelve una cascada recurrente de procesos de creación y aniquilación de múltiples partículas cuando aumentamos la energía del acelerador. Para procesos a energías muy altas el impulso y la energía son proporcionales. De aquí se deduce, usando las relaciones de Heisenberg, que la máxima precisión posible en nuestras medidas es inversamente proporcional a la energía comunicada a la región del espacio, de acuerdo con la fórmula básica $L \approx \hbar c/E$.

La recurrencia *ad infinitum* en la formación de cascadas de partículas a medida que aumentamos la energía es una característica esencial de la teoría cuántica de campos que, no obstante, complica mucho su estructura matemática. La elaboración del delicado formalismo matemático necesario no se alcanzó hasta 1948 para el caso de las interacciones entre electrones y fotones, con los trabajos de Schwinger, Tomonaga, Feynman y Dyson. Para el resto de las partículas del modelo estándar la solución no llegaría hasta 1971, de la mano de los holandeses ‘t Hooft y Veltman. Las teorías de campos que satisfacen este rígido requerimiento matemático se llaman *renormalizables* en la jerga de los físicos. El actual “modelo estándar” es la teoría renormalizable más general compatible con su contenido en partículas y sus simetrías.

El espaciotiempo de la teoría cuántica de campos es minkowskiano: la fuerza gravitacional entre las partículas subatómicas es tan pequeña que los efectos de G son despreciables a escala atómica (es la teoría del límite $G \rightarrow 0$). Ahora bien, nuestra capacidad de medir las propiedades geométricas del espacio de Minkowski queda limitada por las leyes de la mecánica cuántica. Desde el punto de vista práctico, esta limitación se traduce en la regla del “microscopio cuántico”: una precisión hasta distancias de orden L requiere la concentración de una cantidad de energía $\hbar c/L$. Además, la “medida” no puede realizarse ana-

lizando el comportamiento de partículas individuales, sino que el aumento de la energía necesariamente trae consigo la proliferación de los procesos de creación y aniquilación de partículas. Los grandes aceleradores de partículas, como el LEP, del laboratorio europeo de física de partículas (CERN), se convierten así en los microscopios más potentes. Alcanzando energías de cien veces la masa en reposo del protón, miden la estructura del espaciotiempo hasta distancias de 10^{-15} centímetros, una diezmilésima del tamaño del protón. Hasta ahí, se ha comprobado que las miles de predicciones del modelo estándar, dependientes de unos veinte parámetros numéricos determinados experimentalmente, representan una descripción fiel de la física microscópica. La próxima generación de aceleradores, como el Tevatrón de Fermilab, ya en funcionamiento en EE.UU., y sobre todo el LHC, en construcción en el CERN, constituirán “microscopios” al menos diez veces más potentes.

Gravitación cuántica y distancia mínima

La identificación einsteiniana entre la gravitación y la geometría tiene una consecuencia inmediata: que una teoría cuántica de la gravitación implica una estructura cuántica del propio espaciotiempo. Se plantea entonces la cuestión de qué nuevo límite de la Naturaleza será desvelado, por analogía con los límites asociados a c y \hbar . Aun sin disponer todavía de una teoría precisa de la gravitación cuántica, podemos adelantar argumentos que sugieren el establecimiento de una distancia física mínima.

La aplicación directa de las reglas de la mecánica cuántica a la teoría de la gravitación de Einstein da lugar a inconsistencias matemáticas. Lo más fácil es intentar formular una teoría cuántica de las ondas gravitacionales, “arrugas” o

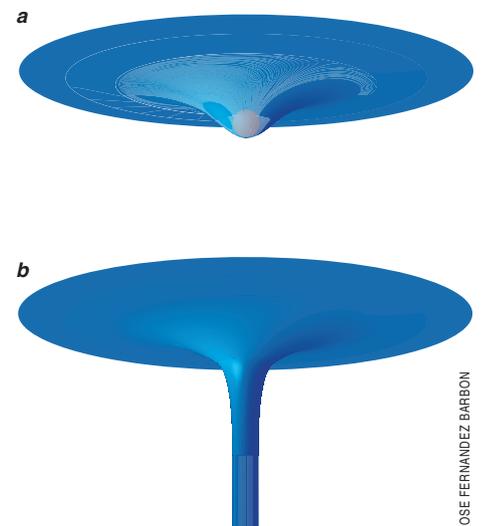
vibraciones de la geometría espaciotemporal similares a las ondas electromagnéticas. Cuánticamente, se pueden ver como conjuntos coherentes de partículas, de la misma manera que una onda electromagnética es un conjunto *coherente de fotones*. Los *análogos gravitacionales de los fotones se denominan gravitones*.

A las energías de los laboratorios actuales, los gravitones individuales interactúan de manera tan débil que nunca han sido detectados directamente. Resulta, sin embargo, que las interacciones entre gravitones producen cascadas de creación y aniquilación demasiado violentas a medida que consideramos distancias cada vez más pequeñas (o energías cada vez más grandes), de tal forma que la delicada estructura matemática que funcionaba para las demás partículas del modelo estándar fracasa estrepitosamente para los gravitones. En la jerga de los físicos, la teoría cuántica de los gravitones no es *renormalizable*. La experiencia con otros casos similares de teorías no renormalizables sugiere una explicación posible: que el gravitón no sea una partícula “fundamental”, sino que tenga “componentes” a una escala de distancias determinada por la intensidad intrínseca de la interacción gravitacional. Si esta idea es correcta el gravitón revelaría sus componentes en la vecindad de la escala de Planck: $L_p = \sqrt{\hbar G/c^3}$, la única cantidad con dimensiones de longitud que se puede formar con las tres constantes fundamentales de la física, c , \hbar y G . Numéricamente, vale unos 10^{-33} centímetros, una distancia fantásticamente pequeña, mucho más allá de nuestras capacidades tecnológicas en la construcción de aceleradores de partículas.

La longitud de Planck es importante por otra razón, posiblemente más profunda. Hemos visto que necesitamos concentrar una energía del orden de $\hbar c/L$ para alcanzar una re-

solución de distancias de orden L . Pues bien, la energía necesaria para medir la estructura del espaciotiempo con una precisión del orden de la escala de Planck es tal que en esa región se formaría un agujero negro microscópico con un radio de Schwarzschild del mismo orden de magnitud. Esto significa que las fluctuaciones cuánticas que cambian la estructura geométrica e incluso topológica del espaciotiempo, tales como agujeros negros microscópicos, son tan importantes como los gravitones cuando alcanzamos la escala de Planck. Esta es la vieja idea de Wheeler, que habló de la estructura “espumosa” del espaciotiempo cuántico. Por otra parte, que las fluctuaciones cuánticas puramente gravitacionales adquieran la misma magnitud que las fluctuaciones cuánticas descritas por el modelo estándar también sugiere que todas las interacciones de la Naturaleza están unificadas a distancias del orden de la escala de Planck.

Un intento de utilizar el microscopio cuántico para mejorar la precisión espacial más allá de la longitud de Planck requeriría un aumento de la energía disponible. Como los agujeros negros crecen en tamaño al aumentar su energía, la consecuencia sería la formación de un agujero negro mayor que la longitud de Planck, con lo que no se logra mejorar la precisión. Así pues, resulta que la posibilidad de producir agujeros negros como fluctuaciones cuánticas pone un límite operativo al funcionamiento del “mi-



JOSE FERNANDEZ BARBON

2. EN LA TEORIA GENERAL DE LA RELATIVIDAD, la fuerza gravitacional se reinterpreta como la curvatura del espaciotiempo en las proximidades de un objeto masivo (a). Cuando la energía está suficientemente concentrada la deformación del espaciotiempo puede cambiar su estructura topológica, formándose un *agujero negro* (b). En un sistema de coordenadas adecuado, un agujero negro se puede visualizar como un “tubo infinito”, al final del cual se halla el horizonte de sucesos.

roscopio de Heisenberg”: existirá una distancia efectiva mínima. Por esta razón, la mayor parte de los físicos creen que la construcción de una teoría cuántica de la gravitación requerirá una revolución de características similares a las revoluciones relativista y cuántica, en el sentido de que introducirá un nuevo límite en la Naturaleza, ahora en la escala de distancias.

El carácter central de los agujeros negros cuánticos en los argumentos anteriores plantea la cuestión de si podemos encontrar pistas importantes sobre gravitación cuántica en el estudio de los agujeros negros macroscópicos (los que están bien descritos clásicamente por la relatividad general). Esta estrategia ya funcionó históricamente en el descubrimiento de la propia mecánica cuántica. En aquella ocasión, aunque se disponía de una buena descripción clásica de la radiación electromagnética (la teoría de Maxwell), el estudio por parte de Planck

de sus propiedades termodinámicas condujo a los primeros ejemplos de comportamiento cuántico.

La aplicación de la mecánica cuántica a un agujero negro macroscópico produce resultados sorprendentes. Debido al carácter unidireccional del horizonte de sucesos (se puede entrar pero no salir) resulta que un par partícula-antipartícula creado espontáneamente por una fluctuación cuántica puede perder uno de los componentes detrás del horizonte, alterándose el balance de las fluctuaciones cuánticas en sus proximidades. Como demostró Stephen Hawking en su famoso trabajo de 1974, el efecto neto de este proceso es una radiación emitida por el agujero negro. Esta radiación está alimentada por la energía del campo gravitacional y tiene una temperatura característica, llamada temperatura de Hawking, que es inversamente proporcional a la masa del agujero negro. Aplicando entonces argumentos generales de termodi-

námica, parecidos a los usados por Planck hace un siglo en el caso de la radiación electromagnética, podemos deducir el número de estados microscópicos que debería albergar el agujero negro para poder radiar con esa temperatura. El resultado es que el agujero negro se puede describir como un sistema cuántico con una unidad de información por cada unidad de área del horizonte, en unidades de la longitud de Planck. Una conclusión que concuerda con deducciones de carácter más heurístico realizadas unos años antes por Jacob Bekenstein, de la Universidad Hebrea de Jerusalén, y de nuevo refrenda la idea de que la longitud de Planck es, de forma efectiva, una distancia mínima en la gravitación cuántica.

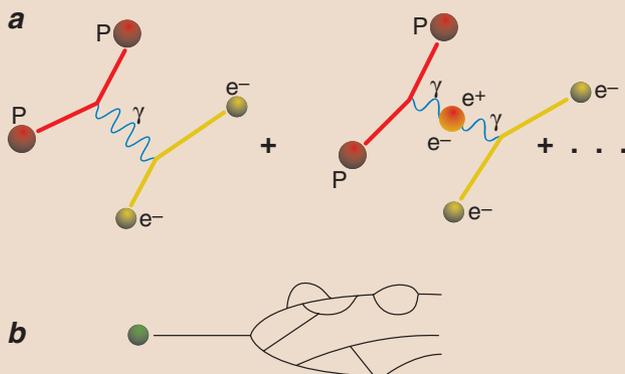
Hacia un nuevo paradigma

Las consideraciones anteriores son sugestivas pero imprecisas. Para progresar es necesaria una teoría de gravitación cuántica, aunque sea de naturaleza aproximada: por ejemplo, un modelo concreto de la estructura interna del gravitón a la escala de Planck. De todas las ideas propuestas hasta la fecha, la teoría de cuerdas representa el marco teórico más prometedor en esta línea. Desarrollada inicialmente en torno a 1970 como una teoría imperfecta de las fuerzas nucleares, languideció durante una década para emerger en 1984 como el marco general para construir teorías de la gravitación cuántica que incorporen, además, la unificación de todas las interacciones incluidas en el modelo estándar.

El punto de partida de la teoría de cuerdas es una hipótesis aparentemente modesta, y un tanto arbitraria. La idea es que las partículas que denominamos “elementales” son en realidad objetos extensos en una dimensión; cuerdas diminutas cuya dinámica está especificada por modos de vibración. Cada modo de vibración independiente representaría un tipo de partícula del modelo estándar, que serían todas ellas manifestaciones del mismo objeto básico, la cuerda fundamental. De ser cierta, esta hipótesis unificaría todas las partículas subatómicas. Por ahora se ha visto que conduce a una estructura matemática de riqueza in-

Procesos elementales

Procesos elementales que contribuyen a la interacción entre un protón (P) y un electrón (e^-) en teoría cuántica de campos (a). El protón emite un fotón (una partícula de luz, γ) en un punto del espaciotiempo. El fotón es absorbido en otro punto del espaciotiempo por el electrón, aunque existe una cierta probabilidad de que este fotón genere espontáneamente un par electrón-positrón de vida breve, o incluso procesos más complicados. La posición de los “vértices”, en los que hay creación o aniquilación espontánea de partículas, así como las trayectorias entre dos vértices consecutivos, están sujetas a fluctuaciones cuánticas. Los cálculos detallados demuestran que la suma coherente de todas estas “historias” alternativas es la versión cuántica de la fuerza electromagnética entre el protón y el electrón. De ahí el nombre “teoría cuántica de campos”. En (b), la trayectoria de una partícula sufre bifurcaciones por cascadas de creación y aniquilación de partículas. Estos efectos son muy significativos a energías suficientemente altas.

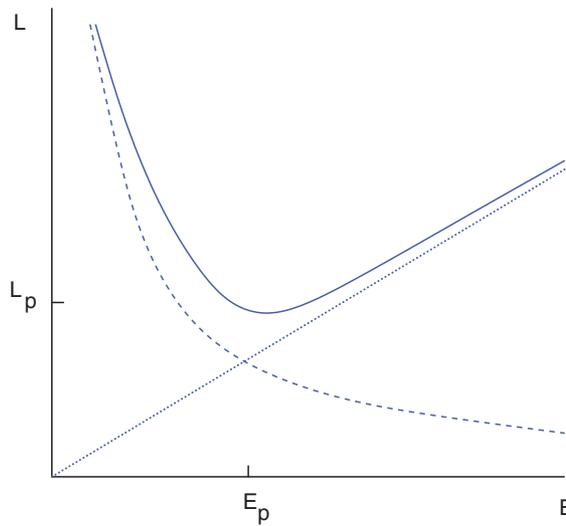


sospechada, cuya exploración por parte de físicos y matemáticos aún pertenece en gran medida a las generaciones futuras.

Desde el punto de vista físico, las teorías de cuerdas tienen propiedades bastante sorprendentes. Hay dos clases básicas de cuerdas, según sean cerradas sobre sí mismas, a modo de anillos, o abiertas, con dos extremos libres. Las cuerdas cerradas siempre tienen un modo de vibración que se puede identificar con el gravitón, mientras que las cuerdas abiertas siempre tienen un fotón. El resultado es que las cuerdas “predicen” la existencia de gravitación en el sector cerrado, y de interacciones de tipo *gauge* (como la interacción electromagnética) en el sector abierto. Por otra parte, al ser objetos extendidos sobre una distancia del orden de la longitud de Planck, las cuerdas interactúan con “suavidad” a distancias muy cortas. Por tanto, las cuerdas cerradas proporcionan un modelo (el único conocido) de la estructura compuesta del gravitón a la escala de Planck, y son la versión microscópica de las “excitaciones” del propio espacio-tiempo.

Además de la gravitación y las interacciones del modelo estándar, la teoría de cuerdas tiene otras predicciones “genéricas” que añaden una gran complicación a su estudio. Una es la existencia de más de cuatro dimensiones espaciotemporales, hasta un total de once como máximo. Las dimensiones extra serían invisibles por estar curvadas en pequeños círculos, esferas, u otras formas geométricas más intrincadas. La gran variedad de estructuras microscópicas que pueden adoptar las dimensiones adicionales son útiles a la hora de reproducir todas las estructuras visibles en el modelo estándar, pero por otra parte dejan abiertas muchas posibilidades que, *stricto sensu*, restan predictibilidad a la teoría.

Otra predicción concreta de las teorías de cuerdas es la aparición de nuevas simetrías en la Naturaleza. La más importante es la llamada



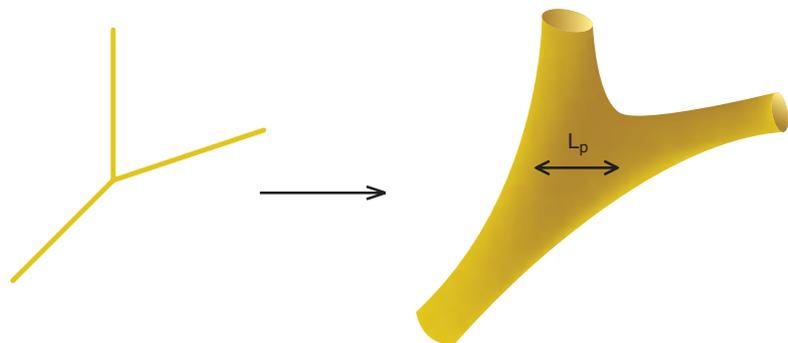
3. SEGUN EL PRINCIPIO DE HEISENBERG, una energía E permite alcanzar una precisión $L = \hbar c/E$ (línea intermitente). Por el contrario, si toda la energía colapsa en un agujero negro, su tamaño aproximado, $L = L_p^2 E / \hbar c$, crece linealmente con la energía (línea de puntos). Combinando ambos efectos se obtiene la modificación planckiana del principio de Heisenberg, incluyendo la distancia mínima $L_p = \sqrt{G\hbar/c^3}$.

supersimetría, que en cierto sentido unifica las partículas asociadas a las fuerzas, como el fotón y el gravitón, con las partículas asociadas a la materia, como el electrón, los quarks y los neutrinos. No obstante, esta simetría sólo se puede realizar de forma aproximada en la Naturaleza, ya que no es una propiedad del modelo estándar. Una de las perspectivas experimentales más excitantes para la nueva generación de aceleradores de partícu-

las, como el LHC del CERN, sito en Ginebra, es la posibilidad de descubrir dimensiones adicionales del espacio-tiempo, o bien supersimetría, o bien ambas novedades características de la teoría de cuerdas. Si bien esto no supondría una verificación inmediata de la teoría de cuerdas, se trataría de un fuerte indicio experimental en esta dirección.

Uno de los descubrimientos más importantes en teoría de cuerdas, debido a Joseph Polchinski, del Instituto de Física Teórica de Santa Bárbara en California, fue la observación de que las cuerdas mismas no son los únicos objetos fundamentales de la teoría. Habíamos visto que las cuerdas aparecen en dos modalidades: las cerradas, asociadas a la gravitación, y las abiertas, asociadas a las interacciones *gauge* (como el electromagnetismo). Los extremos de estas cuerdas abiertas pueden propagarse libremente por todo el espacio, pero también pueden estar localizados en regiones singulares con dimensiones variables. Estas regiones singulares a las cuales las cuerdas abiertas estarían “enganchadas” se conocen como *D-branas* en la jerga técnica. Literalmente, son como “impurezas” o defectos estructurales del espaciotiempo cuyas propiedades dinámicas están caracterizadas por el estado de vi-

de las cuerdas abiertas pueden propagarse libremente por todo el espacio, pero también pueden estar localizados en regiones singulares con dimensiones variables. Estas regiones singulares a las cuales las cuerdas abiertas estarían “enganchadas” se conocen como *D-branas* en la jerga técnica. Literalmente, son como “impurezas” o defectos estructurales del espaciotiempo cuyas propiedades dinámicas están caracterizadas por el estado de vi-



4. EN TEORIA CUANTICA DE CAMPOS las interacciones son “duras”, en el sentido de que las partículas se crean o aniquilan instantáneamente en un punto del espaciotiempo. Estas interacciones duras son matemáticamente inconsistentes para el caso de los gravitones. En teoría de cuerdas, por el contrario, las interacciones están distribuidas sobre una región finita del espaciotiempo, con una extensión del orden de la longitud de Planck.



5. TRES EJEMPLOS DE D -BRANAS de dimensión cero, uno y dos. Las D -branas son objetos singulares en el espacio, en los cuales están confinados los extremos de las cuerdas abiertas. Todas las propiedades físicas de las D -branas se definen en términos del estado de vibración de sus cuerdas abiertas.

bración de su “cabellera” de cuerdas abiertas. Las D -branas pueden ser objetos puntuales, y entonces se llaman D -partículas, o tener una dimensión extendida (D -cuerdas), dos dimensiones extendidas (D -membranas), etc. Si las cuerdas cerradas representan fluctuaciones del espaciotiempo, se puede decir que las cuerdas abiertas representan las fluctuaciones de las D -branas.

Así pues, el espectro de objetos “elementales” en teoría de cuerdas contiene no sólo las cuerdas mismas (cuyas vibraciones más ligeras darían las partículas del modelo estándar), sino también las impurezas en la estructura del espaciotiempo denominadas D -branas. Por último, cuando las cuerdas o las D -branas alcanzan un alto grado de excitación sobre su estado de mínima energía, se convierten en agujeros negros. La transición entre D -branas y agujeros negros se en-

tiende bastante bien a nivel cuantitativo. En un importante cálculo, Andrew Strominger y Cumrun Vafa, de la Universidad de Harvard, fueron capaces de probar que el número de estados de un agujero negro (según la predicción de Bekeinstein y Hawking) coincide en el punto de transición con el de un sistema adecuado de D -branas. Hoy por hoy, el cálculo sólo se puede realizar con detalle para un cierto tipo de agujeros negros con mucha simetría, para los cuales se conoce bien su estructura microscópica en términos de cuerdas y D -branas. La generalización del cálculo de Strominger y Vafa a cualquier tipo de agujero negro sigue siendo un problema abierto, pero el éxito en casos particulares es matemáticamente tan intrincado y preciso que deja pocas dudas sobre la validez del modelo en los casos en que es aplicable.

Geometría no conmutativa

Tenemos así una imagen globalmente coherente en la que el modelo estándar y los agujeros negros cuánticos son dos límites extremos de una estructura microscópica más rica. Incorpora además los ingredientes necesarios para la construcción de una teoría cuántica del espaciotiempo, con una distancia física mínima del orden de la longitud de Planck.

Esta situación nos recuerda los resultados de la vieja teoría cuántica de principios de los años veinte, basada en conceptos heurísticos tales como el de la dualidad onda-corpúsculo. Esta dualidad, o la más general *complementariedad* de Bohr, adquieren un contenido cuantitativo con las relaciones de indeterminación de Heisenberg. Sin embargo, a un nivel más profundo sabemos que estas relaciones de indeterminación son una consecuencia de la estructura matemática subyacente a la mecánica cuántica. En aquella ocasión el principio básico resultó ser la *no conmutatividad* entre posiciones y velocidades. Siguiendo con nuestra analogía, sería conveniente abstraer un formalismo más fundamental a partir de la teoría de cuerdas y branas, en el cual la distancia mínima de Planck estuviera incorporada de manera intrínseca. En otras palabras, buscamos un principio de *no conmutatividad* puramente espaciotemporal.

Un ejemplo del tipo de estructura matemática necesaria fue descubierto por el gran matemático francés Alain Connes en los años ochenta. Connes inventó una geometría cuántica en la cual las coordenadas espaciales son matrices que no conmutan entre sí, en analogía exacta con las posiciones y velocidades de un electrón. Entonces se

El espectro de estados de la teoría de cuerdas

La escala de masas de las partículas del modelo estándar se extiende en torno a la masa del bosón W , unas 80 veces la del protón; el espectro va desde las partículas sin masa, como el fotón (γ) y el gravitón (G), hasta el quark *top*, unas 170 veces más pesado que el protón. Todas estas partículas aparecerían como los modos más bajos de vibración de las cuerdas. A una escala intermedia, M_s , encontramos los modos de vibración superiores de las cuerdas, y más arriba las D -branas. Por último, por encima de la masa de Planck, $M_p = \sqrt{\hbar c/G}$, las excitaciones típicas generan agujeros negros. En la mayor parte de los modelos M_s y M_p son comparables, del orden de 10^{19} veces la masa del protón. Sin embargo, es posible construir modelos en los que estas escalas de masa toman valores muy bajos, sólo, incluso, unas 1000 veces la masa del protón.

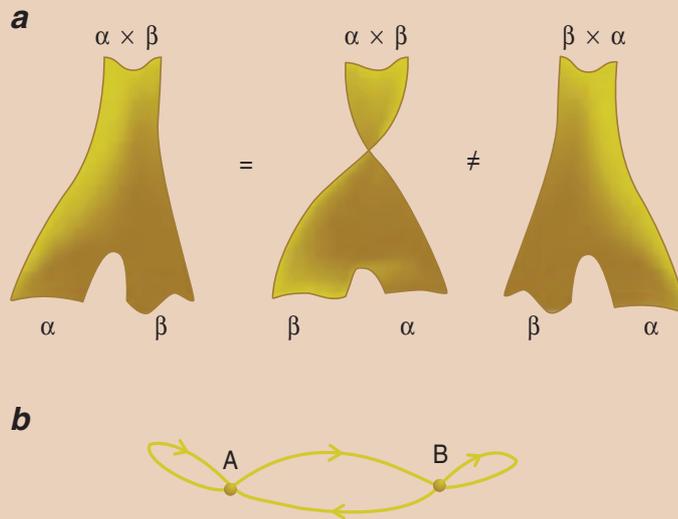
puede copiar la demostración de los libros de texto de las relaciones de Heisenberg, y obtener un conjunto de relaciones análogas entre las coordenadas espaciales. Por ejemplo, para un plano no conmutativo con coordenadas X e Y , se verifica que las precisiones respectivas en la medida de las posiciones satisfacen $\Delta X \times \Delta Y \geq L_c^2$, donde L_c^2 representa el área mínima físicamente realizable. El principal problema en la aplicación literal de estas ideas a la teoría de cuerdas es la dificultad de obtener efectos gravitacionales en el formalismo de Connes. Es decir, no parece haber una relación natural entre L_c y la longitud de Planck, L_p .

Las cuerdas abiertas poseen propiedades matemáticas que recuerdan la geometría de Connes, como había observado ya en 1986 Edward Witten, del Instituto de Estudios Avanzados de Princeton. Con el advenimiento de las D -branas, el propio Witten enfatizó este hecho de forma más explícita. La posición de una D -brana en el espacio, como el resto de sus propiedades físicas, depende del estado de vibración de las cuerdas abiertas atrapadas en ella. Si tenemos dos D -branas, digamos A y B , colocadas a una cierta distancia, sus posiciones dependerán de las cuerdas abiertas enganchadas en cada una de ellas, pero también de las cuerdas abiertas que tienen un extremo en A y el otro extremo en B . En otras palabras, la posición de una D -brana no se puede definir individualmente, sino que requiere el conocimiento del estado de cualesquiera D -branas que existan en sus inmediaciones. Matemáticamente, se puede demostrar que estas propiedades convierten la posición de una D -brana en una matriz, del mismo tipo que las matrices inventadas por Heisenberg en su creación de la mecánica cuántica.

Basándose en estas ideas, Tom Banks, de la Universidad de Rutgers, Willy Fischler, de la Universidad de Texas en Austin, y Stephen Shenker y Leonard Susskind, de Stanford, propusieron en 1996 que las D -branas son los objetos más fundamentales. Más exactamente, presentaron la hipótesis de que el espaciotiempo mismo está construido como un es-

La no conmutatividad de las cuerdas

Los estados de cuerdas abiertas son, de forma natural, no conmutativos. En (a) consideramos el producto de dos cuerdas abiertas α y β para producir una cuerda con estado $\alpha * \beta$. Este mismo proceso se puede escribir intercambiando el orden de α y β , a costa de “retorcer” la superficie generada por las cuerdas en su movimiento. Claramente, la superficie resultante difiere del producto de β y α para dar $\beta * \alpha$. En (b), dos D -partículas A y B con cuatro tipos de cuerdas abiertas: AA , BB , AB , BA . La posición de las D -branas en cada dirección del espacio depende de cuatro números, que caracterizan el estado de las cuatro clases de cuerda abierta. Estos cuatro números forman una *matriz*, el objeto matemático esencialmente no conmutativo. La matriz se vuelve conmutativa cuando las cuerdas AB y BA se anulan. En este caso las posiciones de A y B se pueden definir como independientes entre sí, sin interferencia cuántica.



tado colectivo de un número infinito de D -branas. El espaciotiempo adquiere así una naturaleza “granular” a la escala de Planck; una especie de “retículo” de D -branas trenzadas mediante las cuerdas abiertas. Las D -branas pasan de ser “defectos estructurales” en el continuo espaciotemporal a representar los propios “ladrillos básicos” del espaciotiempo. En la práctica, esto equivale a derivar todos los objetos de la teoría de cuerdas, incluyendo las cuerdas cerradas y los agujeros negros, a partir de las variables matriciales de las cuerdas abiertas. El estudio intensivo de la así llamada “teoría de matrices BFSS” confirmó en parte estas expectativas para el caso del espaciotiempo más simétrico posible: el de Minkowski en once dimensiones.

Dadas estas consideraciones, no resulta sorprendente que la teoría

BFSS contenga la geometría de Connes como un caso particular; poco más tarde lo demostraría el propio Alain Connes, con la colaboración de Michael Douglas, de la Universidad de Rutgers, y Albert Schwarz, de la Universidad de California en Davis. No obstante, los principales problemas de la teoría de matrices BFSS son sus limitaciones a la hora de reproducir fenómenos gravitacionales más generales. En otras palabras, no es posible obtener un espacio con curvatura en el límite de grandes distancias, sino sólo variantes del espaciotiempo de Minkowski.

Esta situación mejoró considerablemente a finales de 1997 con el trabajo fundamental de Juan Maldacena, entonces en Harvard y hoy en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton. Considerando una configuración de D -branas diferente de la discutida por Banks, Fischler,

Shenker y Susskind, fue capaz de generar un espaciotiempo con curvatura. Esencialmente, Maldacena estudió el mismo tipo de configuraciones de D -branas que habían utilizado antes Strominger y Vafa en su cálculo del número de estados de los agujeros negros. Por esa razón, los espaciotiempos así generados son geoméricamente equivalentes a la región cercana al horizonte de ciertos agujeros negros. El sistema está descrito por las excitaciones de las cuerdas abiertas, que constituyen una teoría de matrices (técnicamente, una versión supersimétrica de las teorías gauge del modelo estándar). Cuando el número de D -branas es grande, el sistema se describe mejor como un espaciotiempo curvado, donde reemplazamos las D -branas y sus cuerdas abiertas asociadas por una cierta geometría semejante a un agujero

negro. La conjetura de Maldacena consiste en la equivalencia exacta de ambas descripciones. Las excitaciones de cuerdas cerradas en el “agujero negro” tienen la misma información física que el conjunto de cuerdas abiertas enganchadas en las D -branas.

La propuesta de Maldacena fue mejorada y generalizada por Edward Witten, e independientemente por Stephen Gubser, Alexander Polyakov e Igor Klebanov, de la Universidad de Princeton. El resultado es un conjunto de reglas, bajo el nombre genérico de “dualidad AdS/CFT”, que dan una definición exacta de la gravedad cuántica para cierto tipo de espaciotiempos con curvatura, en términos de las variables matriciales de sistemas apropiados de D -branas.

Se puede decir que la esencia de la dualidad AdS/CFT y del modelo

BFSS es la “deconstrucción” de la geometría en términos del álgebra de las matrices. La configuración microscópica de un sistema infinito de D -branas codifica la estructura del espaciotiempo que aparece a grandes distancias como el continuo utilizado por Einstein en su teoría general de la relatividad. Aunque estos modelos han revolucionado nuestras ideas sobre la naturaleza del espaciotiempo, por el momento carecemos de una teoría general de la “deconstrucción geométrica”. La elaboración de modelos cuánticos del espaciotiempo constituye un arte, en el sentido de que cada ejemplo concreto requiere trucos matemáticos especiales. Hasta el momento, sólo algunas geometrías con suficiente cantidad de supersimetría han sido codificadas con éxito. Por esta razón, sería conveniente extraer el principio básico que hace posibles estas construcciones, con objeto de encontrar ejemplos más realistas.

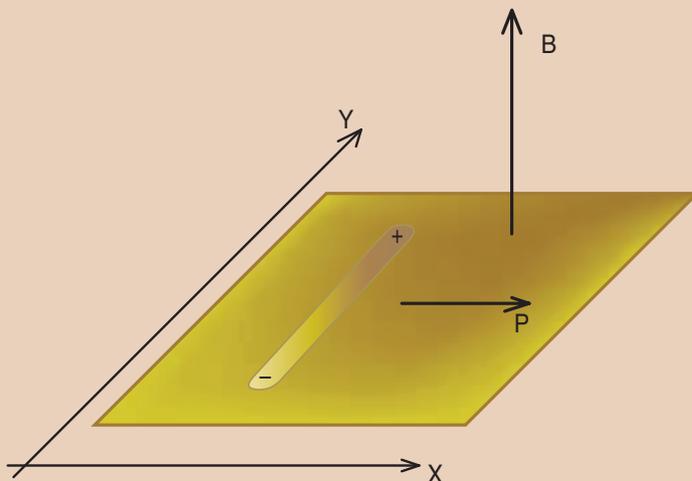
El principio holográfico

Un candidato a ocupar el papel de “principio rector” de la nueva geometría cuántica podría ser el *principio holográfico*, formulado en 1993 por Gerard 't Hooft, de la Universidad de Utrecht, y sistematizado por Leonard Susskind, de la Universidad de Stanford, y Raphael Bousso, de la Universidad de Berkeley. El principio holográfico se basa en la fórmula de Bekenstein y Hawking para la capacidad de información que puede almacenar un agujero negro (véase “La información en el universo holográfico”, de Jacob D. Bekenstein en INVESTIGACIÓN Y CIENCIA, octubre de 2003). Según aquellos autores, los estados cuánticos se pueden asociar a los grados de libertad sobre el área del horizonte, con una densidad de una unidad de información por cada área planckiana.

Es significativo que la capacidad de información crezca con el área del agujero negro, y no con su volumen. Esta conclusión choca frontalmente con las ideas basadas en una teoría cuántica de campos, tal como el modelo estándar, formulada en el espaciotiempo ordinario. En una teoría cuántica de campos los estados físicos se pueden caracteri-

La geometría no conmutativa de Connes

Se puede reproducir la geometría no conmutativa de Connes mediante un modelo intuitivo, que de hecho aparece en la derivación a partir de la teoría de D -branas. Consideremos una cuerda abierta rígida que se comporta como un dipolo eléctrico, con cargas opuestas en los extremos, y que se propaga como en la figura, inmersa en un campo magnético de magnitud $B = \hbar^2 c / 2L_c^2$. Si el dipolo se mueve con impulso P en la dirección X , la fuerza magnética tiende a separar las cargas, equilibrando la atracción eléctrica. La longitud de equilibrio es $Y = 2L_c^2 P / \hbar$, de donde se deduce que las indeterminaciones respectivas satisfacen $\Delta Y = 2L_c^2 \Delta P / \hbar$. Combinando esta relación con la desigualdad ordinaria de Heisenberg, $\Delta X \Delta P \geq \hbar/2$, obtenemos la desigualdad de Connes: $\Delta X \Delta Y \geq \theta = 2L_c^2$. Por tanto, la geometría medida con experimentos que involucren sólo cuerdas abiertas rígidas es el plano no conmutativo de Connes. Para obtenerlo en la teoría BFSS basta encontrar una solución en la que las cuerdas abiertas sean efectivamente rígidas.



zar por las configuraciones de las partículas. Como podemos colocar una partícula en cada punto del espacio (con una precisión dada), la cantidad máxima de información crecería con el volumen del espacio. Sin embargo, un momento de reflexión revela que en muchos de estos estados las partículas estarían tan densamente empaquetadas que colapsarían gravitacionalmente para formar un agujero negro. Una vez que hemos formado el agujero negro, la capacidad de información crece con el área y no con el volumen (o, dicho de otra manera, como la información equivale, salvo una constante, al logaritmo del número de estados que puede adoptar el sistema, el número de estados crece con la exponencial del área en vez de con la del volumen).

El principio holográfico toma esta observación y la eleva a la categoría de propiedad fundamental de cualquier teoría de gravitación cuántica. De acuerdo con este principio, la formulación matemática de una teoría de gravitación cuántica debería hacer uso de variables que residen en la superficie de una región dada, y no en su interior. La interpretación radical diría que las tres dimensiones del espacio son una ilusión basada en nuestra experiencia con estados “diluidos”. Al igual que un holograma codifica una imagen tridimensional en un sistema bidimensional, la formulación básica de la gravitación cuántica tendría como mucho dos dimensiones espaciales macroscópicas. Las dimensiones restantes aparecerían dinámicamente como aproximación de bajas energías. Sin embargo, a energías suficientemente altas la generación de agujeros negros mediante fluctuaciones cuánticas convertiría el espacio tridimensional en un concepto poco útil para describir los fenómenos.

El principio holográfico y el conjunto de ideas relacionadas siguen siendo un proyecto de paradigma, más que una teoría concreta. Sin embargo, su formulación no está sujeta a restricciones tales como la cantidad de supersimetría presente en el espaciotiempo, y sólo depende de propiedades muy robustas de la física de agujeros negros. Por esta razón, la mayor parte de los físicos

teóricos creen que el principio holográfico es una de las piedras angulares del espaciotiempo cuántico.

En casos de gran simetría, modelos como AdS/CFT o la teoría matricial de BFSS proporcionan un laboratorio teórico que representa muchas propiedades del principio holográfico en una situación matemáticamente tratable. En cierto modo, el modelo de Maldacena es a la holografía como el átomo de hidrógeno a la mecánica cuántica. En el descubrimiento de la mecánica cuántica resultó fundamental disponer de un sistema suficientemente simple como para admitir tratamiento matemático preciso, y a la vez suficientemente característico como para ilustrar muchas de las propiedades distintivas de la mecánica cuántica. Por desgracia, el paralelismo acaba ahí, ya que el átomo de hidrógeno sí se encuentra en la Naturaleza y es accesible a experimentos reales, mientras que la geometría de AdS/CFT no corresponde al mundo real, ni siquiera en un sentido aproximado.

Se puede decir que hay un progreso constante hacia la formulación de versiones menos simétricas de la dualidad AdS/CFT. Sin embargo, aún estamos lejos de encontrar una codificación “no conmutativa” de un espaciotiempo similar al observado experimentalmente, con sus cuatro dimensiones en expansión cosmológica y su espectro de partículas no supersimétrico, tal como lo describe el modelo estándar.

dar. El tiempo dirá si nuestras dificultades son puramente técnicas, o por el contrario serán necesarias ideas cualitativamente nuevas. Entretanto, la próxima generación de aceleradores de partículas, principalmente el colisionador de protones LHC del CERN, puede empezar a desentrañar algunos de los misterios sobre la estructura cuántica del espaciotiempo. Por ejemplo, el descubrimiento experimental de supersimetría aproximada representaría un gran avance en el asentamiento del paradigma aquí esbozado.

El autor

José Fernández Barbón Breve currículum del autor.

Bibliografía complementaria

ELECTRONES, NEUTRINOS Y QUARKS. F. J. Ynduráin. Crítica, 2001.

PARTÍCULAS ELEMENTALES: EN BUSCA DE LAS ESTRUCTURAS MÁS PEQUEÑAS DEL UNIVERSO. G. 't Hooft. Crítica, 2001.

EL UNIVERSO ELEGANTE: SUPERCUERDAS, DIMENSIONES OCULTAS Y LA BÚSQUEDA DE UNA TEORÍA DEFINITIVA. B. Greene. Crítica, 2001.

EL UNIVERSO EN UNA CÁSCARA DE NUEZ. S. W. Hawking. Crítica, 2002.