

Probabilidad y causalidad en la filosofía de Max Born

Probability and Causality in the Philosophy of Max Born

M^a Pilar GONZÁLEZ FERNÁNDEZ

Resumen

El legado científico filosófico de Max Born, al estar vinculado a la conocida como interpretación ortodoxa de la mecánica cuántica o interpretación de Copenhague, ha sido entendido desde el marco de una filosofía de la ciencia de corte instrumentalista, considerando su interpretación probabilística de la función de onda como la más clara defensa de una postura indeterminista acausal.

Frente a este orden de cosas, este artículo pretende lograr dos objetivos. El primero consiste en mostrar cómo la interpretación de Born, a pesar de instaurar de forma definitiva el indeterminismo en el ámbito de la física elemental, no implica el abandono de una explicación causal de los fenómenos físicos. El segundo trata de defender la posibilidad de reivindicar una interpretación ‘realista’ de la labor científica a partir de la noción de ‘invariantes observaciones’ que Born propone, conciliando el aspecto dual de la realidad elemental en favor de su carácter corpuscular y analizando la aporética noción de ‘probabilidad objetiva’ que su interpretación instaura.

Palabras clave: Causalidad, Dualidad onda-corpúsculo, Indeterminismo, Interpretación estadística, Objetividad, Teoría cuántica.

Abstract

Max Born's philosophic and scientific legacy is related to the orthodox interpretation of quantum mechanics, which is known as the Interpretation of Copenhagen. Therefore Born's statistical interpretation has been considered as defending a positivist philosophy of science. Opposing this idea, this article is intended to face two main questions. The first one deals with the fact that Born's interpretation of wave function, although it settles indeterminism, does not imply the abandonment of causal explanations of physical phenomena. The second one is aimed at showing how is it possible to defend a 'realistic view' of scientific labour making use of the notion of 'invariant observables' that leads to the reconciliation of wave and corpuscular theories.

Keywords: Causality, Indeterminism, Objectivity, Quantum theory, Statistical interpretation, Wave-particle duality.

1. Introducción

La interpretación probabilística de la función de onda propuesta por Max Born ha sido considerada el tercer pilar que sostiene, junto con el principio de complementariedad de Niels Bohr y las relaciones de incertidumbre de Werner Heisenberg, la conocida como interpretación de Copenhagen. Teniendo en cuenta que esta última se ha situado, en términos generales, en el marco de una filosofía de la ciencia de corte instrumentalista, parece que la aportación de Born no puede sino defender una imagen no realista de la ciencia. Es decir, se tiende a aceptar de forma acrítica que la labor científica y filosófica de este autor avala en gran medida un planteamiento positivista. No olvidemos que Max Born abre las puertas al indeterminismo y este hecho parece propiciar un alejamiento respecto de una visión intuitiva del mundo físico.

Frente a este orden de cosas, la finalidad de este artículo es bien distinta. Éste presenta dos objetivos fundamentales. El primero de ellos se hace eco de nuestro afán por mostrar que, a pesar de la existencia de discursos que afirman que la interpretación probabilística de Born conduce a una violación del principio de causalidad, es posible defender la existencia de una legalidad causal en el contexto fenoménico del mundo cuántico desde el indeterminismo que instaura dicha interpretación, rompiendo así la equiparación clásica existente entre las nociones de determinismo y causalidad. El segundo se vincula a nuestra pretensión de defender que dicha interpretación se sostiene dentro de una imagen realista de la ciencia aunque esto implique una severa reconstrucción de la noción de realidad física.

En relación con esta última cuestión, será preciso determinar el tipo de realidad atribuible a los objetos de conocimiento ofrecidos por la física cuántica. Partiendo del legado de Born, se analizará la posibilidad de construir una noción de realidad ‘débil’ basada en invariantes observacionales, capaz a su vez de restablecer una imagen intuitiva del mundo físico dentro de los límites permitidos por las leyes que rigen el mundo cuántico. Todo ello permitirá, finalmente, reinterpretar la dualidad onda-corpúsculo desde la prioridad de esta última en contra del punto de vista de Louis De Broglie o de Erwin Schrödinger.

Comenzaremos analizando precisamente el problema que suscita en mecánica cuántica el hecho de enfrentarse a una dualidad esencial en el estudio de la materia y de la luz, partiendo de la evolución de la noción de onda a lo largo de las dos primeras décadas del siglo XX. Este análisis, junto con las diferentes tentativas de solución reflejadas en planteamientos teóricos divergentes como los de los dos físicos citados, nos servirá para contextualizar la interpretación estadística que Born elabora y así poder desarrollar posteriormente los dos objetivos ya señalados.

1. Hablando de ondas

Volvamos la vista hacia atrás en el tiempo, hacia la física del siglo XIX. Recordemos las explicaciones científicas de los fenómenos lumínicos proporcionadas entonces. Debemos hacernos cargo de la lucha existente entre dos teorías rivales, la ondulatoria y la corpuscular, a la hora de definir la naturaleza de la luz como onda o como corpúsculo. Es decir, a finales del siglo XIX, la luz solía explicarse en términos de un movimiento ondulatorio en el que cada longitud de onda correspondía a un color determinado. Esta idea era aceptada si bien teniendo en cuenta que la hipótesis corpuscular de Newton, que definía la luz como una lluvia de partículas, de corpúsculos despedidos por el cuerpo luminoso, explicaba fenómenos que la teoría ondulatoria de Huygens no era capaz de asumir (pensemos, por ejemplo, en la propagación rectilínea de la luz). Pero aunque Newton también había contribuido al avance de la óptica con descubrimientos tales como la descomposición de la luz blanca en su espectro, en la alternativa ‘onda-partícula’, el mundo científico terminó por ponerse del lado de Huygens debido, fundamentalmente, a las razones que exponemos a continuación.

En primer lugar, la luz en modo alguno se propagaba como una línea recta en todas las circunstancias. De hecho, existían dos fenómenos de radical importancia que no encontraban explicación en la teoría corpuscular: la difracción y la interferencia.

Gracias a las aportaciones de Fresnel y Young, entre otros, se comprobaba la

completa concordancia de la teoría ondulatoria con estos hechos problemáticos contribuyendo a la defensa de la hipótesis de Huygens. Dicha hipótesis se fue consolidando hasta adquirir la forma de teoría electromagnética gracias a las investigaciones de Faraday, Oersted, Hertz y, fundamentalmente, de Maxwell.

Ahora bien, a principios del siglo XX comenzó de la mano de Max Planck, conforme a la cual determinados fenómenos relacionados con la radiación del calor no podían conciliarse con las leyes clásicas del electromagnetismo y la teoría óptica aceptadas hasta entonces, sino que era necesario suponer que la emisión y absorción de la luz no tenían lugar en cantidades arbitrariamente pequeñas, como mantenía la teoría ondulatoria, sino en cuantos (*quanta*) de luz. A partir de ahí sostenía que la cantidad de energía absorbida o emitida por un átomo era proporcional a la frecuencia. ($E=h\nu$), siendo h la constante que posteriormente llevaría su nombre. Planck mostraba cómo esta nueva constante era necesaria para una correcta descripción de los datos experimentales que se referían a la radiación electromagnética emitida por cuerpos sólidos, esquematizados en un emisor ideal, el ‘cuerpo negro’, a cuyo comportamiento se aproximaban los llamados ‘radiadores de cavidad’¹.

Apenas hizo falta esperar cinco años para que Einstein afirmara que la discontinuidad no tenía lugar solamente en la emisión y absorción de la luz, sino que la propia luz, que no consistía en suaves ondas, era discontinua o cuantizada. Demostraba que la radiación descrita por la ley de Planck, en su forma límite, válida para las altas frecuencias, se comportaba, desde el punto de vista termodinámico-estadístico, como si estuviera compuesta por cuantos de energía $h\nu$ (siendo ν la frecuencia considerada), que él mismo llamaría cuantos de luz². Dicho con otras palabras, en su opinión, la luz se comportaba como una lluvia de partículas. Parecía entonces que la vieja hipótesis de Newton cobraba fuerza de nuevo, ahora apoyada en nuevos hechos experimentales como el efecto fotoeléctrico (o posteriormente, ya en 1923, el efecto Compton) que enfatizaban la estrecha relación existente entre la emisión de energía y la frecuencia. Einstein afirmaría, refiriéndose en particular al efecto fotoeléctrico, que ese extraño comportamiento se comprendería inmediatamente si la luz se cuantizase siendo su energía, como ya hemos visto, $h\nu$. La cantidad de electrones expulsados por la luz sería, por consiguiente, proporcional a la cantidad de fotones o cuantos de luz, y la energía de los electrones sería proporcional a la frecuencia. Como consecuencia, a pesar del escepticismo de la comunidad científica, tomaba consistencia el hecho de que la emisión y la absorción de la luz acontecían siguiendo saltos cuánticos, contrariamente a lo cabría esperar siguiendo la teoría ondulatoria. Finalmente, en 1909, Einstein llegaba a la conclusión de que la radiación tal y como la describía la ley de Planck presenta tanto aspectos ondu-

¹ Planck, M.: (1900) “Über irreversible Strahlungsvorgänge”, *Annalen der Physik* 1, p.p. 69-122.

² Einstein, A.: (1905) “Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt”, *Annalen der Physik* 17, p.p. 132-148.

latorios como corpusculares poniéndose de manifiesto de forma más intensa los primeros en las frecuencias más bajas, los segundos en las más altas³.

Asimismo, esta dualidad onda-corpúsculo, referida hasta el momento a la problemática naturaleza de la luz, también afectaba a la naturaleza del electrón. Muy pronto quedó claro que el ámbito natural del cuanto de acción era el de la física atómica. La explicación proporcionada por Rutherford y colaboradores en torno a 1911 sobre la estructura planetaria del átomo, con un núcleo con la casi totalidad de la masa y carga positiva alrededor del cual se disponen los electrones, planteaba toda una serie de interrogantes acerca de las dimensiones y estabilidad del átomo y de los procesos de emisión capaces de producir los característicos espectros de rayas por emisión de luz en los gases incandescentes.

Será Niels Bohr quien, en 1913 en una serie de tres artículos conocidos como *la Trilogía*⁴, proporcione una imagen del átomo explicando su estructura y, haciendo encajar ésta con los fenómenos de radiación estudiados, plantee un primer nivel de comprensión del átomo en términos cuánticos sosteniendo que en cada átomo existen cierto número de estados denominados estados estacionarios y que cada uno de ellos posee una energía determinada. Asimismo, Bohr afirmaba que la radiación emitida durante la transición de un sistema entre dos estados estacionarios es homogénea, siendo la relación entre la frecuencia, ν , y la energía total emitida, E , $E=h\nu$. De este modo, los diferentes estados estacionarios de un sistema simple que consista en un electrón girando en torno a un núcleo positivo quedaban determinados por la condición de que la relación entre la energía total emitida en la formación de la configuración y la frecuencia de revolución del electrón fuese múltiplo entero de $h/2$. Por último, mantenía que el estado ‘permanente’ de un sistema atómico, es decir, el estado en el cual la energía emitida es máxima, estaba determinado por la condición de que el momento angular de cada electrón en torno al centro de su órbita fuese igual a $h/2\pi$. Bohr aplicaba el modelo planetario al átomo de hidrógeno y, observando la existencia de rayas espectrales, sostenía que el átomo sólo se puede hallar en un conjunto discreto de estados energéticos a los que corresponderían radios de órbitas que, a su vez, formarían un conjunto discreto. Frente a las leyes del electromagnetismo clásico según las cuales el electrón se podría hallar en cualquiera de estas órbitas y tendría que irradiar, perdiendo de este modo energía y haciendo al átomo inestable, Bohr postulaba que el electrón que se encontrase en una de las órbitas de conjunto permitido, la más baja, no irradiaría. Asimismo, si el electrón se encontrase en cualquier otra órbita, irradiaría energía hasta que alcanzase la órbita más baja, dando lugar a una emisión cuya frecuencia se expresaría como

³ Einstein, A.: (1909) “Über die Entwicklung unserer Anschauungen über das Wesen und die Konstitution der Strahlung”, *Physikalische Zeitschrift* 10, p.p. 817-825.

⁴ Bohr, N. (1913): “On the constitution of atoms and molecules”, *Philosophical Magazine* 26. p.p. 1-25, 476-502, 857-875.

la relación entre las diferencias de energía entre los dos niveles y la constante de Planck. Naturalmente esta cuantización de la energía contradecía las leyes de la mecánica clásica, pero era así como conseguía proporcionar una explicación para la estabilidad del átomo, dando al mismo tiempo cuenta de las características del espectro de emisión del hidrógeno. En definitiva, frente a la continuidad que destilaba cualquier cambio de estado en la física ordinaria, se planteaba la discontinuidad como explicación última de la estructura de la materia.

A raíz de lo expuesto, nos encontramos ante una intrigante disyuntiva: ondas o corpúsculos. Pero, ¿cómo se solventa el problema? Nos encontramos ante dos posibles, y casi simultáneas, soluciones antes de llegar a la interpretación de Born. Por un lado, la propuesta por Louis de Broglie con su ‘teoría de la doble solución’ y, por otro, la defendida por Erwin Schrödinger y sus ‘paquetes de ondas’. Comencemos analizando la primera de ellas.

2. La teoría de la doble solución de Louis de Broglie

Louis de Broglie ejemplifica brillantemente la necesidad de resolver esa ‘doble imagen’ que se iba fraguando por momentos. En un texto autobiográfico se observa cómo éste defendía, ya en 1922, la necesidad de elaborar una teoría sintética que combinase ambos aspectos de la realidad elemental⁵.

Digamos que de Broglie seguía los pasos dados por Einstein en 1909 al intentar alcanzar una síntesis entre la estructura discontinua de la energía radiante y los fenómenos ondulatorios. En 1922 publica dos artículos fundamentales⁶ que serán seguidos en 1923 de otros tres⁷ en los que cristalizarán sus planteamientos en torno a la una nueva teoría ondulatoria.

En el primero de los artículos de 1923, de Broglie establece la relación $V=c/b$ entre el movimiento de un corpúsculo libre y la propagación de su onda asociada intentando así dar una interpretación a las condiciones de la estabilidad cuántica para los movimientos intra-atómicos de los electrones. Consideraba que un cuerpo ‘mobile’ coincide en el espacio con una onda de frecuencia \mathbf{u} que se propaga en la

⁵ De Broglie, L.: (1952) *Louis de Broglie: un itinéraire scientifique*. Textes réunis et présentés per Georges Lockak. Paris: Éditions La Découverte, 1987. p. 41. También publicado dentro de la obra *Louis de Broglie, physicien et penseur*. Paris: Albin-Michel, 1953.

⁶ De Broglie, L.: (1922a) “Sur les interférences et la théorie des quanta de lumière”, *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences 175*, p.p. 811-813 y (1922b) “Rayonnement noir et quanta de lumière”, *Journal de Physique et le radium 3*, p.p. 422-428.

⁷ De Broglie, L.: (1923a) “Ondes et quanta”, *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences 177*, p.p. 507-510; (1923b) “Quanta de lumière, diffraction et interférences”, *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences 177*, p.p. 548-550; (1923c) “Les quanta, la théorie cinétique des gaz et le principe de Fermat”, *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences 177*, p.p. 630-632.

misma dirección que él con la velocidad c/b . Esta onda no podía corresponder a un transporte de energía y era considerada únicamente como una onda ficticia asociada al movimiento del *mobile* siendo la velocidad del grupo de ondas de fase igual a la velocidad del *mobile*⁸. De esta forma, de Broglie planteaba una idea de la dualidad onda-corpúsculo intuitiva y física. Las ondas asociadas a las partículas eran entendidas como ‘ondas’ que las ‘guiaban’.

En el segundo artículo de 24 de septiembre de 1923, el físico francés buscó una aplicación precisa de sus ideas al caso de los fotones esbozando una teoría de los fenómenos de interferencia y de difracción de la luz compatible con la existencia de los cuantos de luz. Así daba cuenta de la difracción de los átomos de luz pugnando por encontrar un marco teórico apropiado en el que ondas y corpúsculos coexistiesen.

Finalmente, en su tercer artículo de 8 de octubre mostraba cómo sus ideas conducían para la radiación del cuerpo negro a la ley de Planck estableciendo una correspondencia entre el principio de mínima acción, aplicado al movimiento de un corpúsculo, y el principio de Fermat, aplicado a la propagación de su onda asociada.

Todas estas aportaciones que de Broglie consideraba fundamentales para el desarrollo de una nueva mecánica ondulatoria quedaron recopiladas en su tesis doctoral de 1924⁹. Así, dando un paso más, comprobamos cómo consolida esta audaz idea introduciendo la noción de ‘onda de *de Broglie*’ u ‘onda de materia’ que tendrá con el electrón la misma relación que la que ostentaba la onda luminosa con el fotón, empleando, para ello, todos los hechos conocidos en el caso de la luz¹⁰. De hecho, llega a afirmar que incluso los átomos y las moléculas ordinarios, en forma de haces, se comportan, en lo que respecta a su distribución en el espacio, de acuerdo con las leyes de la teoría ondulatoria, resultando al mismo tiempo igualmente claro que, por lo que se refiere a sus efectos mecánicos, conservan el carácter de partículas.

Todas estas aportaciones encontraron su más firme aval en la comprobación experimental de la difracción de electrones realizada por Davisson y Kunsman en un primer momento¹¹, y confirmada, posteriormente por el mismo Davisson y junto

⁸ El átomo de luz equivalente en razón de su energía total a una radiación de frecuencia \mathbf{u} es el seno de un fenómeno periódico interno, que visto por un observador fijo, tiene en cada punto del espacio igual fase que una onda de frecuencia \mathbf{u} que se propaga en la misma dirección con una velocidad muy parecida (aunque ligeramente inferior) a la constante llamada velocidad de la luz.

⁹ De Broglie, L.: (1924) *Recherches sur la théorie des quanta*. Paris: Masson.

¹⁰ De Broglie, L.: (1924) “A tentative theory of light quanta”, *Philosophical Magazine* 47, p.p. 446-458 y (1925) “Recherches sur la théorie des quanta”, *Annales de Physique* 3, p.p. 22-128.

¹¹ Davisson, C. y Kunsman, C. H. (1923) “The scattering of low speed electrons by platinum and magnesium”, *Physical Review* 22,p.p. 242-258.

con Germer en 1927¹² y por Thomson¹³.

Ahora bien, llegados a este punto no podemos sino preguntarnos por la naturaleza física de esas ondas cuya realidad ya ha quedado irrefutablemente demostrada. La hipótesis de Louis de Broglie que asociaba a cada partícula una onda fue pronto elaborada en una nueva mecánica. Si hay ondas, debe haber una ecuación de onda. La nueva mecánica basada en tal ecuación deberá incluir la mecánica de partículas ordinaria como acaso límite. Esta fue la labor emprendida por Schrödinger.

Pero antes de que pasemos a estudiar la mecánica ondulatoria propuesta por Erwin Schrödinger debemos referirnos a la posterior evolución del pensamiento de Louis de Broglie.

Casi al mismo tiempo que Born proponía su interpretación probabilística, como veremos posteriormente, el físico francés, en un artículo escrito en el verano de 1926¹⁴, intentaba reconciliar los cuantos de luz propuestos por Einstein con los fenómenos de interferencia y de difracción al considerar los cuantos de luz como singularidades de un campo de ondas. Poco después, en un segundo artículo de enero de 1927¹⁵, desarrolla estas consideraciones respecto de la interpretación de la función de onda de Schrödinger y el movimiento de partículas.

En la primavera de 1927 de Broglie hizo madurar esas ideas y las presentó en lo que denominó la ‘teoría de la doble solución’¹⁶. De acuerdo con esta teoría las ecuaciones lineales de la mecánica ondulatoria admiten dos tipos de solución: una función ψ continua con significación estadística y una ‘solución singular’ cuyas singularidades constituyen las partículas físicas bajo discusión. Así, mientras la solución continua ψ , de acuerdo con la interpretación de Born, mide la probabilidad, la solución singular describe la partícula en sí misma. Es decir, los corpúsculos son en realidad una suerte de singularidad de carácter permanente en el seno de una onda continua. De esta forma, de Broglie, proponía una versión de la mecánica cuántica en la que el corpúsculo, identificado con una concentración de energía en una región singular del espacio, preserva esencialmente su naturaleza clásica. Pero, a diferencia de la partícula clásica, es guiado por una onda extensa ψ y así pude mostrar efec-

¹² Davison, C. y Germer, L. (1927) “Diffraction of electrons by a crystal of nickel”, *Physical Review* 30, p.p. 705-740.

¹³ Thomson, G. P. y Reid, A. (1927) “Diffraction of cathode rays by a thin film”, *Nature* 119, p. 890; Thomson, G. P. (1927) “The diffraction of cathode rays by thin films of platinum”, *Ibid* 120, p. 802; Thomson, G. P. (1928) “Experiments on the diffraction of cathode rays”, *Proceedings of the Royal Society of London (A)*, 119, p.p. 600-609.

¹⁴ De Broglie, L.: (1926) “Sur la possibilité de relier les phénomènes d’interférence et de diffraction à la théorie des quanta de lumière”, *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences* 183, p.p. 447-448.

¹⁵ De Broglie, L.: (1927) “La structure atomique de la matière et du rayonnement et la mécanique ondulatorie”, *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences* 184, p.p. 273-274.

¹⁶ De Broglie, L.: (1927) “La mécanique ondulatorie et la structure atomique de la matière et du rayonnement”, *Journal de Physique et du Radium* 8, 225-241.

tos de difracción e interferencia. La dualidad onda-partícula ha sido reducida por este físico a una síntesis. No se trata de elegir una imagen u otra sino que onda y partícula constituyen la realidad física¹⁷.

3. La aportación de Schrödinger

Nos encontramos en 1925. Es entonces cuando Werner Heisenberg acaba de emprender la dura tarea de introducir un esquema formal general autónomo que englobase todos los fenómenos cuánticos. Con la ayuda de Born y Jordan¹⁸, Heisenberg da lugar a lo que se conocerá como mecánica matricial, la primera teoría consistente explicativa de los fenómenos cuánticos¹⁹.

Este formalismo implicaba a ojos de Heisenberg en un primer momento la renuncia a todo intento de descripción espacio-temporal de los acontecimientos, basándose exclusivamente, en su desarrollo, en magnitudes observables. Como consecuencia, la formulación exclusivamente matemática propuesta por Heisenberg se expresaba en términos de un álgebra no conmutativa para aquellas magnitudes observables de la teoría. Es decir, Heisenberg nos ofrecía un cálculo matemático que contemplaba magnitudes no conmutativas y que desafiaba cualquier interpretación visualizable enfatizando el elemento de discontinuidad. No obstante, a pesar de renunciar a una descripción clásica en el espacio y en el tiempo, proporcionaba una teoría cuya concepción básica era el corpúsculo²⁰.

Ahora bien, según se ha visto, Louis de Broglie ya había planteado la posibilidad de que el dualismo onda-corpúsculo pudiera ser una propiedad general del mundo microscópico, llegando a la conclusión de que cada cuerpo en movimiento podía acompañarse de una onda y que resultaba imposible separar el movimiento del cuerpo y la propagación de la onda. En ese sentido se puede afirmar que había desarrollado los primeros elementos de una mecánica ondulatoria de partículas.

Poco después Schrödinger conoce los trabajos de Louis de Broglie y de Einstein e inspirado por ellos llega a una formulación completa de la mecánica ondulatoria

¹⁷ Ahora bien, cabe afirmar que posteriormente de Broglie matiza su posición atenuándola bajo el nombre de la 'teoría de la onda piloto'. En esta teoría renunciaba a incorporar el corpúsculo a la onda y se ceñía a constatar el dualismo onda-corpúsculo.

¹⁸ Born, M. y Jordan, P. (1925): "Zur Quantenmechanik", *Zeitschrift für Physik* 34, p.p. 858-888, donde Born y Jordan prueban la validez de la ecuación matricial $pq - qp = (h/2\pi i)$ y BORN, M., Heisenberg, W. y Jordan, P.: (1926) "Zur Quantenmechanik II", *Zeitschrift für Physik* 35, p.p. 557-615.

¹⁹ Heisenberg, W. (1925): "Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen", *Zeitschrift für Physik* 33, p.p. 879-893.

²⁰ Jammer, M. (1989): *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*. USA: Tomash Publishers. p. 270.

de las partículas materiales²¹. El problema de los estados estacionarios de Bohr aparece bajo una nueva luz. Es un problema de valores propios asociados a una ecuación diferencial específica en derivadas parciales, la ecuación que después se llamará ecuación estacionaria de Schrödinger. Los niveles energéticos corresponderán a valores propios, mientras que las respectivas soluciones propias corresponderán a valores complejos que, mediante su módulo al cuadrado, determinarán la densidad de distribución de carga de los electrones.

Schrödinger, por tanto, ofrecía una teoría basada en el cuerpo familiar de las ecuaciones diferenciales, afín a la mecánica clásica de fluidos y capaz de sugerir una representación visualizable sin demasiados problemas²². Los electrones, que siguiendo a de Broglie serán considerados ondas de materia, vendrían definidos por una función de amplitud de onda mecánica ψ cuya propagación era explicada mediante una ecuación diferencial de segundo grado en derivadas parciales para la función de onda ψ y sus valores propios de energía. Se trataba más bien de un enfoque analítico que, procediendo de una generalización de las leyes clásicas del movimiento, subrayaba el elemento de continuidad y constituía una teoría cuya concepción básica era la onda²³. Garantizaba así Schrödinger la conexión entre la física cuántica y los tradicionales fundamentos clásicos. Sin embargo, esta nueva mecánica también presentaba problemas.

Schrödinger identificaba las partículas con paquetes de onda, una superposición de ondas monocromáticas que se concentraban espacialmente. Ahora bien, mientras que toda partícula supone una concentración de carga eléctrica en una pequeña zona de espacio, con una localización casi puntual, los paquetes de ondas se dispersaban rápidamente a lo largo de una amplia región. La no dispersión de los paquetes de ondas comprobada experimentalmente y la estabilidad de las partículas que se observaban en los procedimientos de colisión son fenómenos que atentan contra su planteamiento. Asimismo, el hecho de que durante el proceso de medida ψ cambiase discontinuamente a una nueva configuración (lo que se conoce como colapso de la función de onda), resultaba inexplicable si nos encontramos ante una onda física expandiéndose de manera continua en el espacio. Otro aspecto problemático se vinculaba a la cuestión de que la función ψ es una función en un espacio abstracto de configuración (no un espacio real), dependiendo su número de dimensiones del número de grados de libertad del sistema. Y, por último, quedaba la aporética cues-

²¹ Schrödinger, E.: (1926) "Quantisierung als Eigenwertproblem" (Primera comunicación), *Annalen der Physik* 79, p.p. 361-376; (1926) "Quantisierung als Eigenwertproblem" (Segunda comunicación), *Annalen der Physik* 79, p.p. 489-527; (1926) "Quantisierung als Eigenwertproblem" (Tercera comunicación), *Annalen der Physik* 80, p.p. 437-490; y (1926) "Quantisierung als Eigenwertproblem" (Cuarta comunicación), *Annalen der Physik* 81, p.p. 109-139.

²² Jammer, M.: (1974) *The Philosophy of Quantum Mechanics. The Interpretations of Quantum Mechanics in Historical Perspective*. USA: John Wiley & Sons. p.p. 27 y ss.

²³ Jammer, M.: (1989) *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*. p. 270.

ción de que ψ se define como una función compleja que se expresa mediante números complejos y no mediante números reales.

Estos problemas junto con la demostración de su identidad formal con la mecánica matricial de Heisenberg²⁴ significaron el comienzo de la derrota de los aspectos interpretativos propuestos por Schrödinger²⁵, aunque para que ésta alcanzara un carácter definitivo, fue necesaria una nueva interpretación de dicha función de onda, la propuesta por Max Born.

4. La interpretación probabilística de Max Born

Born ya había realizado aportaciones a la nueva mecánica. Con su ‘regla de correspondencia’²⁶ consiguió traducir fórmulas clásicas en sus análogos cuánticas. También jugó un papel fundamental en el descubrimiento de la mecánica matricial con el conocido como ‘Drei Männer Arbeit’, esto es, el trabajo realizado junto con Jordan y Heisenberg, ya mencionado, que conducirá a la primera exposición comprensiva de los cimientos de la mecánica cuántica moderna en su formulación matricial.

Posteriormente, una vez que fue demostrado por Schrödinger que tanto la mecánica matricial como su propia mecánica ondulatoria conducían a los mismos resultados, Born asumió otro reto: proponer una nueva interpretación para la función de onda de Schrödinger alternativa a los paquetes de onda de éste, labor que le valdría el Premio Nobel en 1954.

Fue en conexión con el estudio de la mecánica cuántica de los procesos de colisión como surgió esta nueva interpretación de la función de onda. Born afirmaba que se oponía a la interpretación de Schrödinger porque éste no explicaba los fenómenos de colisión del electrón que, a sus ojos, evidenciaban su naturaleza corpuscular²⁷.

Born comenzó a buscar una explicación de los procesos de colisión entre una partícula libre, como una partícula α o un electrón y un átomo, desde los principios de la mecánica cuántica y, para ello, adoptó el formalismo de la mecánica ondulatoria por considerarlo el único adecuado al problema a estudiar, tal y como sostiene en un artículo de junio de 1926²⁸. En este artículo, Born ofrecía un análisis pre-

²⁴ La equivalencia entre ambos formalismos fue obra del propio Schrödinger. Véase Schrödinger, E.: (1926) “Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen”, *Annalen der Physik* 79, p.p. 734-756.

²⁵ Jammer, M.: (1989) *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*. p.p. 273 y ss.

²⁶ Born, M.: (1924) “Über Quantenmechanik”, *Zeitschrift für Physik* 26, p.p. 379-395.

²⁷ Born, M.: (1961) “Bemerkungen zur statistischen Deutung der Quantenmechanik”, *Werner Heisenberg und die Physik unserer Zeit*. Vieweg, Braunschweig. p.p. 103-108.

²⁸ Born, M.: (1926a) “Zür Quantenmechanik der Stossvorgänge”, *Zeitschrift für Physik* 37, p.p. 863-867.

liminar del tratamiento de los procesos de colisión. Un desarrollo más pormenorizado del tema tendría lugar en dos escritos posteriores²⁹. En ellos, considerando que las funciones de onda inicial y final del electrón, esto es, antes y después de la interacción con el átomo y en cualquier caso suficientemente lejos del centro de dispersión, son aproximadamente ondas planas, el procedimiento empleado para el desarrollo de lo que se conoce como ‘aproximación de Born’ fue el de la aplicación de la teoría de perturbaciones al problema de la dispersión de ondas planas³⁰.

Así, denotando por $\mathcal{Y}_m^0(q_j)$ las funciones propias del átomo sin perturbar, y en el supuesto de que el electrón, de masa m y energía $E = h^2/2mI^2$, siendo I su longitud de onda asociada, se acercase al átomo en la dirección del eje z , encontraba, para la función de onda dispersada, a gran distancia del átomo la siguiente expresión:

$$\mathcal{Y}_{nE}^{(1)}(x, y, z; q_j) = \sum_m \iint_{\mathbf{a}\mathbf{x} + \mathbf{b}\mathbf{y} + \mathbf{g}\mathbf{z} > 0} d\mathbf{w} \mathbf{f}_{nm}^E(\mathbf{a}\mathbf{x} + \mathbf{b}\mathbf{y} + \mathbf{g}\mathbf{z} + \mathbf{d}) \mathcal{Y}_m^0(q_j),$$

donde $d\mathbf{w}$ es el elemento de ángulo sólido en la dirección definida por los cosenos directores de $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{g}$

Fue en el comentario que seguidamente hacía de este resultado, donde Born afirmaba que la única posibilidad, para una interpretación corpuscular del mismo, residía en que se considerara a $\mathcal{Y}_{nm}^{(E)}$, o mejor dicho, $|\mathcal{Y}_{nm}^{(E)}|^2$ como la probabilidad de encontrar al electrón dispersado en la dirección determinada por $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{g}$ ³¹. Añadiendo a continuación que

... la mecánica ondulatoria de Schrödinger es capaz de dar una respuesta total a preguntas sobre el efecto de la colisión, pero no puede establecer ninguna relación de causalidad. No tiene respuesta a la pregunta de ¿cuál es el estado después de la colisión?, sino más bien a la pregunta de ¿cuál es la probabilidad de un determinado efecto de la colisión?³²

Justificando siempre la necesidad de una interpretación que superara los aspectos contradictorios a los que se había llegado y que reconciliara la teoría de Schrödinger con una concepción corpuscular de la materia, Born tenía claro que aunque Schrödinger había intentado interpretar a los corpúsculos, y en particular a los electrones, como paquetes de ondas, elaborando para ello fórmulas totalmente

²⁹ Born, M.: (1926b) “Quantenmechanik der Stossvorgänge”, *Zeitschrift für Physik* 38, p.p. 803-827 y (1926) “Zur Wellenmechanik der Stossvorgänge”, *Göttinger Nachrichten* 1926, p.p. 146-160.

³⁰ Jammer, M.: (1974) *The Philosophy of Quantum Mechanics. The Interpretations of Quantum Mechanics in Historical Perspective*. p. 39.

³¹ Born, M.: (1926) “Zür Quantenmechanik der Stossvorgänge”. p. 865.

³² Ibidem.

correctas, sus conclusiones no eran sostenibles ya que los paquetes de ondas se dispersaban con el paso del tiempo y aparecían graves dificultades al describir la interacción de dos electrones como la colisión de dos paquetes de ondas en el espacio tridimensional ordinario³³. Es por ello por lo que Born propone una nueva interpretación donde el curso entero esté determinado por las leyes de la probabilidad y a un estado en el espacio le corresponda una probabilidad definida, que venga dada por la onda de de Broglie asociada al estado. Consecuentemente, un proceso mecánico estará acompañado por un proceso ondulatorio, la onda-piloto, descrito por la ecuación de Schrödinger, cuyo significado será el de dar la probabilidad de una determinada evolución del proceso mecánico. Por ejemplo, la amplitud de onda-piloto será cero en un cierto punto del espacio y ello significará que la probabilidad de encontrar el electrón en ese punto será nula.

Podemos afirmar que el hecho más singular de su interpretación probabilística asociada a la función de onda radica en su ley de composición. Según Born, si se superpone una onda, de función \mathbf{y}_1 y de densidad de probabilidad $|\mathbf{y}_1|^2$, y otra onda, de función \mathbf{y}_2 y de densidad de probabilidad $|\mathbf{y}_2|^2$, la densidad de la onda resultante, de función $\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2$, no será $|\mathbf{y}_1|^2+|\mathbf{y}_2|^2$, como ocurría con las probabilidades clásicas, sino $|\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2|^2$, diferente en general de la anterior.

Tal y como se deriva de lo anterior, esta noción de probabilidad, único conocimiento que para Born se puede tener de los fenómenos naturales, daba lugar a un nuevo concepto de causalidad, como veremos posteriormente. Se sustituía así la evolución del estado de un sistema por la de las probabilidades de los diferentes estados posibles. En resumen, en cuanto a la interpretación probabilística de Born para la función de onda \mathbf{y} de una partícula, se puede decir que $|\mathbf{y}|^2 dt$ indica la probabilidad de encontrar la partícula en el volumen elemental dt , entendida en su sentido clásico, como punto material con posición y momento definidos en cada instante. Contrariamente a la interpretación de Schrödinger, la función de onda \mathbf{y} no representa el sistema ni ninguno de sus atributos físicos, sino únicamente el conocimiento que se tiene del mismo³⁴.

Habiendo interpretado \mathbf{y} como una onda de probabilidad, según ya hemos expuesto, Born se dio cuenta de que \mathbf{y} se podía expandir en términos de un conjunto ortonormal de funciones propias de \mathbf{y}_n de la ecuación de Schrödinger $[H - W, \mathbf{y}] = 0$,

$$\mathbf{y} = \sum_n c_n \mathbf{y}_n$$

³³ Born, M.: (1969) *Atomic Physics*. Londres: Blackie and Son Ltd. p. 95.

³⁴ Icaza, J. J.: (1991) *La construcción de la mecánica cuántica*. Bilbao: Servicio Editorial UPV. p. 137.

donde de acuerdo con la relación de completitud

$$\int |\mathbf{y}(q)|^2 dq = \sum_n |c_n|^2$$

Born se tuvo que preguntar por el significado que debía ser otorgado a c_n . El hecho de que para una única función propia normalizada $\mathbf{y}(q)$, correspondiente a una única partícula, la parte derecha de la ecuación anterior fuera la unidad, le sugirió que la integral $\int |\mathbf{y}(q)|^2 dq$ debía ser considerada como el número de partículas $|c_n|^2$ y como la frecuencia estadística de que suceda el estado caracterizado por el índice n . Para justificar esta creencia Born calculó esencialmente lo que más tarde fue llamado valor medio de la energía W para \mathbf{y} y obtuvo

$$W = \sum_n |c_n|^2 W_n$$

donde W_n es el valor propio de energía de \mathbf{y}_n .³⁵

En definitiva, Born al establecer que el módulo al cuadrado de la función de onda no representaba más que la densidad de la probabilidad de hallar la partícula en el espacio lograba subsanar la ruptura conceptual existente entre la mecánica matricial, cuyo objeto de estudio se centraba en torno a la noción de partícula, y la mecánica ondulatoria, cuyo objeto de estudio continuaban siendo las ondas, ruptura que persistía a pesar de la unificación formal. Esto es, dota al formalismo de una interpretación significativa al establecer que el valor esperado del operador asociado a una variable dinámica en un estado cuántico descrito por una determinada función de onda se tenía que contemplar como la predicción teórica del valor medio de la propia variable, tal como resultaría midiendo réplicas del sistema físico en ese estado con lo cual las nociones de posición, velocidad, órbita de una partícula, etc. seguían siendo utilizadas implícitamente. De esta manera, la interpretación probabilista de Born pasará a formar parte de la interpretación ortodoxa de la mecánica cuántica, la Interpretación de Copenhague, junto con las relaciones de incertidumbre de Heisenberg y el principio de complementariedad de Bohr.

5. La interpretación probabilística de la función de onda y causalidad

Es momento de abordar la cuestión del indeterminismo y la causalidad mencionada al comienzo de estas páginas. Aunque Born hace añicos el determinismo clásico, defendemos que en la imagen del mundo que él propone la causalidad sigue estando presente, sigue siendo considerada base de la cognoscibilidad científica.

³⁵ Jammer, M.: (1989) *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*. p. 304.

Sin la posibilidad de establecer una conexión necesaria entre fenómenos no hay ciencia. En definitiva, hablar de ciencia implica hablar de relaciones causales. Ahora bien, vayamos por partes. En primer lugar hemos de reconocer que el abandono del determinismo es un hecho. Afirma Born:

La mecánica cuántica de Schrödinger proporciona casi una respuesta definida a la cuestión del efecto de la colisión, pero no se trata de una descripción causal. No responde a la cuestión ‘cuál es el estado tras la colisión’, sino sólo a la cuestión ‘cuál es la probabilidad de un resultado específico de la colisión’. Aquí nos enfrentamos al problema del determinismo. Desde el punto de vista de nuestra mecánica cuántica no hay ninguna magnitud que en un caso individual establezca causalmente el efecto de la colisión. (...) Yo personalmente me inclino por renunciar al determinismo en el mundo atómico.³⁶

En otras palabras, entendemos que el indeterminismo es la directa consecuencia del establecimiento de una noción de probabilidad diferente de la clásica. Esto es, la interpretación estadística de Born establece que la imposibilidad del conocimiento completo de los fenómenos es algo inherente a los fenómenos mismos.

Lo que está causalmente determinado no es el salto cuántico, sino la probabilidad a priori de que ocurra. Ésta se determina por la integración de la ecuación de Schrödinger, de forma completamente análoga a la correspondiente de la mecánica clásica y pone en relación mutua dos intervalos de tiempo estacionarios con un tiempo finito entre ellos. El salto se produce, por tanto, sobre un verdadero vacío. Lo que pasa durante el salto difícilmente puede describirse mediante un lenguaje que sugiera imágenes a nuestra capacidad de intuición.

De esta forma cabe matizar que la probabilidad, desde el momento en que va unida a la función de onda, no puede explicarse como un conocimiento imperfecto de un estado de cosas, no es ya una mera ficción matemática, sino algo poseedor de algún tipo de realidad física que se desarrolla en un tiempo y se propaga en un espacio de acuerdo con la ecuación de Schrödinger. Y esto, como sabemos, se aleja de una noción de probabilidad clásica.

No hace falta recordar que en mecánica clásica el conocimiento del estado de un sistema cerrado en un instante cualquiera determina sin ambigüedad el estado pasado o futuro de dicho sistema. Ahora bien, estamos de acuerdo con Born en que incluso el carácter determinista de las leyes mecánicas, que resulta incuestionable en el ámbito de la física clásica, *de hecho* no es tal. Esto es, dicha mecánica no permite la absoluta determinación de las variables de un sistema en todas las circunstancias³⁷.

³⁶ Born. M.: “Zur Quantenmechanik der Stossvorgänge”, p. 865.

³⁷ Born, M. (1955): “Is classical mechanics in fact deterministic?”, *Physics in my generation*. Nueva York: Springer-Verlag. p.p. 79-80.

Es decir, las leyes de la mecánica clásica, en particular, y las leyes de la física clásica, en general, están construidas de tal forma que si las variables de un sistema cerrado son dadas en un momento inicial, pueden ser calculadas para cualquier otro instante aunque, en la mayoría de los casos, esté más allá de la habilidad humana desarrollar las matemáticas implicadas. Observamos cómo el azar empieza a condicionar la labor científica, si bien es verdad que de forma totalmente tangencial, ya que se recurría a la probabilidad a la hora de definir el estado inicial de un sistema, pero el comportamiento estadístico de cualquier estado futuro se determinaba por completo siguiendo las leyes deterministas de la mecánica clásica. Ya que nadie puede observar todas las partículas y resolver las innumerables ecuaciones que se plantean en cualquier estudio termodinámico no cabe sino aceptar un planteamiento probabilístico, aunque se presuponga de antemano que todas las posiciones y velocidades de todas las partículas pueden, en principio, ser determinadas. Partiendo de este hecho, los métodos estadísticos deben ser, de manera más o menos provisional, aceptados. En otras palabras, como no tenemos toda esta información sobre los detalles del sistema debemos servirnos de cálculos estadísticos³⁸. Concluyendo, el carácter determinista de las leyes mecánicas resulta incuestionable en el ámbito de la física clásica. Ahora bien, analizando la cuestión con mayor rigurosidad, deberíamos hablar de un determinismo débil. Recogemos las palabras de Born que ejemplifican esta cuestión.

El determinismo de la física clásica resulta ser una quimera, producida por la sobreestimación de los conceptos lógico-matemáticos. Es un ídolo, no un ideal, de las ciencias naturales, y por ello no puede esgrimirse como objeción en contra de la interpretación estadística, por principio indeterminista, de la mecánica cuántica.³⁹

Mientras la mecánica clásica ha intentado reconciliar todas las observaciones realizadas dentro de su marco teórico con una idea preconcebida de causalidad vinculada a la noción de determinismo hasta aceptar esta última como un postulado metafísico en lucha constante contra la insalvable intrusión del azar, defendemos que la teoría cuántica nace con una conciencia clara de su carácter estadístico indeterminista. La noción de probabilidad clásica cambia substancialmente en la nueva mecánica cuántica ya que, en el contexto cuántico, el concepto de probabilidad juega un importante papel de manera apriorica⁴⁰. Solamente debemos recordar lo que ya conocemos. En la mecánica cuántica un conocimiento de cierta función nos permite seguir el curso de un proceso físico en la medida en que está determinado

³⁸ Born, M.: (1927) "Physical aspects of quantum mechanics", *Physics in my generation*. p. 7.

³⁹ Born, M.: (1955) "Statistical Interpretation of Quantum Mechanics", *Physics in my generation*. p. 97.

⁴⁰ Born, M.: (1927) "Physical aspects of quantum mechanics", p. 9.

no en un sentido causal determinista sino en uno estadístico. También sabemos, que un sistema cerrado se definirá mediante un sistema estacionario o una mezcla de tales estados dada por: $p(q, q') = \sum P(I) |y(I, q) y^*(I, q')|$, a partir de la cual se obtiene, teniendo en cuenta que para $q = q'$ con la función $p(t, q, q) = n(t, q) n(a, q) = |y(a, q)|^2$, $\bar{A} = a$, $n(q) = p(q, q) = \sum P(I) |y(I, q)|^2 = \sum P(I) n(I, q)$. Lo cual muestra que el coeficiente arbitrario $P(I)$ es la probabilidad de encontrar el sistema en el estado estacionario I . Consecuentemente, el sistema no está determinado, al menos no mediante las leyes que conocemos hasta el momento. Mientras la teoría clásica introduce los coordenados que determinan los procesos individuales, sólo para eliminarlos a causa de nuestra ignorancia generalizando sus valores, la nueva teoría obtiene los mismos resultados sin introducirlos⁴¹. La mecánica cuántica se nos presenta afirmando indubitadamente que la observación en modo alguno es 'inocua', que la interacción que se da entre el objeto de estudio y el dispositivo experimental empleado no es ni reducible ni desechable. Es por ello, por lo que, se plantea la cuestión de que los problemas dinámicos de la teoría cuántica, a diferencia de aquellos de la física clásica, no pueden ser definidos sin una decisión 'subjetiva', más o menos arbitraria, del investigador sobre su objeto de estudio. Dicho de otro modo, la mecánica cuántica no describirá un estado objetivo independiente del mundo exterior, sino un aspecto de ese mundo obtenido al considerarlo desde un cierto punto de vista 'subjetivo', punto de vista que implicará un cierto planteamiento experimental y no otro. Resulta necesario realizar una elección. Una elección que supone trazar un límite, una línea fronteriza, que no se puede cruzar y que viene definida por h ⁴².

En palabras de Born:

... la idea de una observabilidad absoluta que es la raíz de los conceptos clásicos resulta sólo posible en la imaginación como un postulado que no puede ser satisfecho en realidad.⁴³

En definitiva, no podemos sino reconocer que la mecánica cuántica acepta que su ignorancia es estructural; que el dispositivo experimental forma un todo con el objeto de estudio; que la perturbación que aquel ejerce sobre éste no puede ser infinitamente reducible, ni siquiera en teoría. El determinismo ha sido abandonado. Ahora bien, ¿implica esto una renuncia a la causalidad?, ¿podemos cruzarnos de brazos aceptando que el azar, y no la causalidad, devenga en ley suprema del mundo físico?, ¿implica la accidentalidad, la probabilidad, una completa arbitrariedad de ciertos fenómenos?

⁴¹ Ibid. p. 10.

⁴² Born, M.: (1964) *Natural Philosophy of Cause and Chance*. Nueva York: Dover Publications. p. 127.

⁴³ Ibid. p. 100.

Es en este momento, a la hora de responder a estas cuestiones, cuando nos posicionamos defendiendo una lectura de Born que creemos incuestionable. Existe cierta legalidad incluso a la hora de tratar sucesos probabilísticos. Y hablar de legalidad, de un establecimiento de leyes, de relaciones, implica la posibilidad de establecer cierta relación causal entre los sucesos sometidos a estudio. Es la causalidad la base de la ciencia. Pensemos que, aunque los sucesos observables obedecen a las leyes del azar, la probabilidad de que tengan lugar funciona conforme a leyes que tienen las características esenciales de las leyes causales. Sostenemos que, de manos de Born, la probabilidad se convierte en una certidumbre práctica por lo que principio de causalidad sigue siendo válido⁴⁴.

Aclaremos esta cuestión. La conexión causal hace referencia a la existencia de leyes según las cuales la aparición de una entidad *B* de cierta clase depende de la aparición de una entidad *A* de otra clase, denotando la palabra entidad a cualquier objeto físico, fenómeno, situación o suceso. *A* será considerada la causa mientras que *B* será el efecto de dicha causa. Asimismo, si dicha conexión se refiere a sucesos individuales, las nociones de antecedenencia (la causa debe ser anterior o, al menos, simultánea con el efecto) y de contigüidad (la causa y el efecto deben estar en contacto espacial o conectados mediante una cadena de cosas intermedias en contacto) entrarán a formar parte de la idea de causalidad⁴⁵. Por ello, parece ser que ésta puede ser definida como la creencia en la existencia de una dependencia física mutua entre situaciones observacionales. Sin embargo, todas las especificaciones de esta dependencia en lo que se refiere al espacio y el tiempo (contigüidad y antecedenencia) y a la agudeza infinita de la observación (determinismo) no nos parecen, de acuerdo con la opinión de Born, fundamentales, sino consecuencias de las leyes empíricas actuales⁴⁶. Es más, resulta más bien que la causalidad y sus mencionados atributos son sólo el resultado de un proceso de inferencia mediante inducción que finalmente trasciende la experiencia. Son ideas que han tenido una gran influencia en el desarrollo de la física clásica y que, por ello, se han consolidado dentro del edificio físico-matemático pre-cuántico.

Resumiendo, el principio de causalidad que reposa sobre la suposición de que el estado inicial de un sistema puede ser determinado exactamente tiene que ser abandonado. La ley causal, así entendida, pierde su sentido.

Muchos se aferran a ella, nos dice Born, porque es una ‘necesidad del pensamiento’. Pero, las ‘necesidades del pensamiento’ no son a menudo otra cosa que hábitos de pensamiento.⁴⁷

⁴⁴ Born, M.: (1960) *El inquieto universo*. Buenos Aires: Eudeba. p.p. 167-168.

⁴⁵ Born, M.: (1964) *Natural Philosophy of Cause and Chance*. p. 9.

⁴⁶ *Ibid.* p. 124.

⁴⁷ Born, M.: (1960) *El inquieto universo*. p. 173.

Ya sabemos cual es el camino a seguir: hemos de cambiar esos hábitos.

Born se plantea la necesidad de elaborar una nueva forma de la ley de causalidad que sea capaz de explicar la validez objetiva de las leyes estadísticas. Sólo hace falta tener en cuenta lo siguiente: una vez que en un proceso dado se determinan las condiciones iniciales tan exactamente como lo permiten las relaciones de incertidumbre, las probabilidades de todos los estados ulteriores posibles están determinadas por leyes exactas. Si el experimento se repite muchas veces con las mismas condiciones iniciales, puede predecirse la frecuencia y las desviaciones con respecto al promedio con que aparecerán los efectos esperados⁴⁸. Pensemos que la relación causa-efecto se usa de forma ordinaria de dos maneras diferentes. Estableciendo una ley general, independiente del tiempo, o haciendo que un hecho definido sea necesariamente el consecuente de otro hecho definido. Ambos casos tienen la idea de necesidad en común (idea que Born acepta como metafísica). La física clásica ha aceptado oficialmente la segunda forma de causalidad, que defiende una secuencia necesaria en el tiempo, estableciendo así leyes deterministas. La mecánica cuántica a través de la interpretación estadística de Born opta por la primera: el simple establecimiento de una ley general.

De esta manera vemos cómo Max Born defiende que la indeterminación es causalmente legislable, que el carácter probabilístico sometido a leyes de la realidad más fundamental se presenta como un hecho incuestionable a partir de la mecánica cuántica. Es decir, podemos afirmar que esta nueva mecánica, que es esencialmente estadística y, a causa de la distribución de partículas, completamente indeterminista, sigue manteniendo una legalidad causal. No hay determinismo para los objetos físicos, como las partículas pequeñas, pero sí para la probabilidad de que aparezcan. Negar la relación causa-efecto implicaría negar el proceder mismo de la ciencia, por lo que el abandono del determinismo no debe implicar una pérdida del principio de causalidad. Basta con que éste último sufra una reelaboración substancial, reelaboración que a ojos de Born se adapta perfectamente al marco teórico de la filosofía de la complementariedad de Bohr⁴⁹.

La causalidad debe limitarse a las predicciones de las amplitudes de probabilidad. Se sustituye la evolución del estado de un sistema por la de las probabilidades de los diferentes estados posibles aunque se conserva la causalidad en la ley de evolución temporal de las probabilidades. Así logramos alcanzar el primer objetivo del presente análisis: resulta posible establecer, en el ámbito del mundo cuántico, una legalidad causal indeterminista.

Sin embargo, la interpretación estadística de Max Born no sólo afecta a la aporética cuestión del establecimiento de una ‘causalidad indeterminista’, sino que implica la revisión del concepto de realidad física a la luz de su noción de probabilidad. Abordemos, a continuación, esta cuestión.

⁴⁸ Ibid. p.p. 173-174.

⁴⁹ Born, M.: (1951) “Physics in the last fifty years”, *Physics in my generation*. p. 73.

6. ‘Invariantes observacionales’ y realidad

Ya hemos comentado cómo la interpretación probabilística de Max Born parece haber sido vinculada a una imagen positivista del quehacer científico. Frente a esta posición, planteamos una alternativa esencialmente diferente. Lejos de situar a Max Born en un marco instrumentalista, queremos poner de manifiesto que su planteamiento puede ser considerado ‘realista’, si bien es verdad que matizando substancialmente la noción de realidad aquí empleada.

Born propone un criterio de objetividad que, en nuestra opinión, no es sino una defensa de una imagen realista de la ciencia, aunque dicha imagen sea en gran medida diferente de la clásica. Ahora bien, para argumentar esta cuestión debemos analizar cómo forja su noción de ‘realidad’ a partir de invariantes observacionales.

La pregunta que nos hacemos es la siguiente: ¿qué tipo de realidad podemos atribuir a los objetos últimos de conocimiento que nos ofrece la física cuántica? Creemos que ésta es la cuestión que se plantea Born, cuestión que le induce a establecer un criterio de objetividad. Dicho criterio no puede sino ser concebido más que como un medio que posibilite la distinción entre las impresiones subjetivas y los hechos objetivos intentando lograr una intersubjetividad común⁵⁰. Es ésta la meta que persigue Born, una meta que consideramos modesta a la par que ineludible si queremos afirmar que las aportaciones de la ciencia en última instancia nos muestran una imagen inteligible del mundo físico. El logro de esa intersubjetividad implica poder explicar cómo las percepciones sensoriales de los individuos particulares y sus posteriores elaboraciones conceptuales pueden alcanzar un carácter objetivo válido para todos los individuos⁵¹, estableciéndose así los cimientos del saber científico.

Ahora bien, desde el mismo momento en que nos introducimos en el ámbito cuántico, este principio de objetividad sufre diferentes ataques. Tal y como las relaciones de incertidumbre sostienen, el investigador debe renunciar a investigar todas las propiedades de un sistema físico de forma simultánea, debe abandonar la idea de la posibilidad de observar el curso de los hechos sin perturbarlos. Parece entonces que la subjetividad no es eliminable y el conocimiento objetivo se problematiza.

Este es el estado de cosas que encuentra Born y, a partir de él, emprende la labor de dotar de significación intuitiva a las nociones cuánticas. ¿Tienen realidad física ondas y partículas? Esta es la cuestión de que se sirve como punto de partida, cuestión cuya respuesta, a nuestros ojos, no es sino la resultante de un planteamiento realista y, en gran medida, ingenuo. Centrémonos de nuevo en el análisis de elec-

⁵⁰ Born, H. y M. y Einstein, A.: (1973) *Correspondencia 1916-1955*. Méjico: Siglo XXI Editores. p. 207.

⁵¹ Born, M.: (1964) “Symbol and Reality”, *Natural Philosophy of Cause and Chance*. p. 220.

trón y su onda piloto. Ya hemos visto que físicamente no tiene sentido considerar esta onda como una onda armónica simple de extensión indefinida. Debe ser considerada, como un paquete de ondas consistente en un pequeño grupo de números de onda infinitamente próximos, y por lo tanto de gran extensión espacial. La velocidad de grupo es idéntica a la velocidad de la partícula, o lo que es lo mismo, el paquete de ondas se mueve junto con la partícula. Pero, ¿en qué lugar del paquete está la partícula? ¿Cómo podemos definir dicha partícula? Parece claro que debemos matizar nuestra forma de acercarnos racionalmente al mundo físico.

No debemos olvidar, nos dice Born, que, a pesar de todos sus éxitos, la teoría cuántica exige un sacrificio intelectual: la renuncia a la completa determinabilidad de la posición y del tiempo con respecto a una partícula cuyo impulso y energía se conocen, y la renuncia a la predicción completa de los hechos futuros. Ya que la naturaleza parece exhibir aspectos irracionales e ininteligibles, deben ponerse ciertos límites a la razón y al entendimiento⁵².

¿De qué límites se trata? De aquellos que nos imponen las relaciones de incertidumbre en el contexto experimental tal y como dicta el principio de complementariedad de Bohr. A partir de ahí, será posible redefinir la noción de realidad física. En definitiva, es necesario un cambio en la racionalidad científica, renunciar a la contradicción existente entre teorías modificando la noción de realidad física⁵³. Esto es lo que creemos que consigue realizar Born, una empresa tan costosa como ajena a una perspectiva instrumentalista de la ciencia, cosa que se observará a continuación.

Born defiende que lo que entendemos por realidad externa objetiva se configura en nuestra mente por medio de un proceso inconsciente que une las diferentes impresiones sensibles recibidas. Esto es, sostiene que la mente construye inconscientemente invariantes de percepción y que estos son lo que un hombre común denomina cosas reales. En su opinión, la ciencia hace exactamente lo mismo solo que en un nivel diferente de percepción, usando sus mecanismos propios de observación y medida. De esta manera la realidad será entendida como la suma de invariantes de observación. Así Born afirma:

... yo no puedo ver otra interpretación racional de esta palabra en física.⁵⁴

Analicemos en mayor medida esta cuestión. Nos dice Born:

⁵² Born, M.: (1960) *El inquieto universo*. p. 236.

⁵³ Born, M.: (1928) "On the meaning of physical theories", *Physics in my generation*. p. 27.

⁵⁴ Born, M. (1964): *Natural philosophy of cause and chance*. p. 125.

Empleé (...) la expresión invariantes observacionales con el siguiente sentido: cuando vemos un pájaro que se aleja volando lo que percibimos realmente es un pájaro por lo general reconocible, que se va haciendo más y más pequeño hasta que ya no podemos distinguir sus particularidades y acabamos por ver sólo un punto. A pesar de eso, tenemos conciencia de estar viendo el mismo pájaro. En las percepciones de los sentidos, totalmente diferentes, hay algo constante, invariante, que nuestro cerebro trata inconscientemente. Esto es lo que yo llamo invariantes o constantes observacionales.⁵⁵

No tenemos dudas. Born no huye del realismo, sino que propone una aproximación intuitiva a lo que la ciencia considera como real partiendo del hecho de que intuitivamente se afirma que la realidad de algún objeto, suceso o situación implica presuponer que nuestras impresiones sensibles no son una permanente alucinación, sino que son indicadores, señales, de un mundo que existe independientemente de nosotros. Es decir, se trata de afirmar que, aunque esas señales cambian y se modifican constantemente, nos damos cuenta de que *hay* objetos con propiedades invariantes. El conjunto de estos invariantes de nuestras impresiones sensibles es la realidad física que nuestra mente construye de forma inconsciente. La ciencia no será sino la construcción firme de esos invariantes de observación cuando no son obvios⁵⁶.

En nuestra opinión, es este planteamiento teórico el que le permite a Born dirimir la aporética cuestión de la naturaleza dual, corpuscular y ondulatoria, de la realidad elemental. Las partículas son reales, con lo cual no podrán ser reducidas a una explicación únicamente ondulatoria, porque presentan invariantes de observación. Creemos que un electrón es real, que existe, porque tiene una carga e , una masa m y un spin s definidos, lo cual implica que, independientemente de cuáles sean las condiciones o circunstancias experimentales, si observas un efecto que la teoría achaca a la presencia de electrones encontrarás para estas cantidades e , m , s , los mismos valores numéricos. Esto, claro está, no implica que un electrón pueda ser entendido como un pequeño grano de arena con una posición y un momento bien definidos simultáneamente en el espacio. Es decir, se reformula nuestra imagen intuitiva del mundo natural. Aunque en nuestra experiencia diaria atribuyamos a los cuerpos posiciones y velocidades definidas no hay ninguna razón para creer lo mismo para otras dimensiones que están más allá de los límites de la experiencia diaria. Es de este modo cómo Born fundamenta que la posición y velocidad de una partícula no son consideradas invariantes de observación. Son atributos de la idea de partícula que usamos cuando queremos describir un cierto fenómeno en términos de partículas. Las partículas son reales porque tienen ciertas propiedades invariantes, aquellas no sujetas a las relaciones de incertidumbre⁵⁷.

⁵⁵ Born, H. y M y Einstein, A.: *Correspondencia 1916-1955*. p. 211.

⁵⁶ Born, M. (1964): *Natural philosophy of cause and chance*. p. 104.

⁵⁷ *Ibidem*.

Nos acercamos a la meta propuesta. Nada tiene que ver con una perspectiva instrumentalista de la ciencia defender que nuestro lenguaje se adapta a nuestros conceptos intuitivos y dichos conceptos intuitivos deben ser usados, en la medida de lo posible, incluso en la descripción de planteamientos tan abstractos como los de la propia mecánica cuántica. No solo no podemos evitar usarlos, sino que así debemos hacerlo, incluso cuando no tenemos todas las propiedades que lo hacen posible. En definitiva, aunque un electrón no se comporte como un grano de arena en todos los sentidos, tiene las propiedades invariantes suficientes para ser considerado algo real.

Así pues, observamos cómo la noción de invariantes de observación que Max Born instituye no es sino una manera de explicar lo que puede ser considerado real sin olvidar los límites que en el mundo cuántico encorsetan nuestra percepción de la realidad, proporcionando, al mismo tiempo, la posibilidad última de una interpretación intuitiva. Las relaciones de incertidumbre de Heisenberg son la férrea ley que determina la interpretación del formalismo de la teoría cuántica, teoría que prohíbe de forma explícita la medida de variables coordinadas con infinita exactitud como consecuencia de la estructura atómica de la materia que dicha teoría refleja. Esta restricción en la medida simultánea de cantidades tradicionalmente conjugadas, que conduce al indeterminismo, como vimos en el capítulo anterior, nos obliga a realizar dos descripciones complementarias para lograr una comprensión intuitivamente válida, dos descripciones de un mismo fenómeno real que deja de ser problemático si su realidad viene definida en los términos dictados por Born a partir de la noción de invariante de observación. Así los objetos atomísticos, aunque no tengan todas las propiedades que poseen los objetos ordinarios, tendrán las suficientes propiedades definidas para adscribirles realidad física. Desde este punto de vista, solucionamos dos problemas: la posibilidad de establecer una visión ‘realista’ del mundo cuántico y la justificación de una imagen dual de dicha realidad, ya que a partir de este sistema conceptual surgen juntas partículas y ondas⁵⁸. Retomemos esta segunda cuestión.

Se puede hablar en tal sentido del aspecto ‘dual’ de la materia. Ambas descripciones son necesarias para concebir cualquier fenómeno cuántico. Sólo en casos límite se da una interpretación que trabaja con partículas o con ondas de forma exclusiva y excluyente⁵⁹. Concluyendo, no se trata de que un electrón aparezca unas veces como una onda y otras como una partícula, sino que resulta necesario utilizar ambos modelos para describir el estado de un sistema cuántico. Para describir una situación física, uno tiene que usar ambos conceptos, ondas y partículas. Ondas para describir un ‘estado’, es decir, la situación experimental como un todo, y partículas,

⁵⁸ Born, M.: (1955) “Statistical Interpretation of Quantum Mechanics”, *Physics in my generation*. p.p. 97-98.

⁵⁹ Born, M. (1964): *Natural philosophy of cause and chance*. p. 105.

como los propios objetos de investigación. Ahora bien, debemos reconocer que, dentro de esta imagen dual, el carácter corpuscular adquiere un mayor peso específico.

En definitiva, creemos poder servirnos de Born cuando mostramos su labor como la de un científico que se comporta como un filósofo realista aceptando que sus impresiones sensibles son mensajes de un mundo exterior y real. Para entender estos mensajes o dar explicación de los mismos puede usar teorías de muy diverso tipo, incluso con un gran grado de complejidad. Ahora bien, nunca debe olvidar que los modelos físicos y las construcciones tienen un contenido de realidad totalmente determinado que no es esencialmente diferente de las cosas de la vida diaria⁶⁰. Debe tener presente que su labor le ayuda a conocer más y mejor una parcela de la realidad, ya que descubre invariantes de observación que siempre representan cosas reales⁶¹.

7. ¿Cómo concebir una probabilidad objetiva?

Llegados a este punto, tan solo nos queda tratar una última cuestión. Debemos analizar la noción de probabilidad que su interpretación estadística instaaura. Claro está que tenemos que afirmar que la onda de probabilidad no es entendida por Max Born como una mera herramienta, un artilugio matemático, sino como algo real, ya que, como el mismo Born plantea:

... ¿cómo confiaríamos en la probabilidad de las predicciones si con esta noción no nos referimos a algo real y objetivo?⁶²

Es decir, Born asume, quizás de forma acrítica, que su interpretación refleja cómo es el mundo de la realidad elemental. La onda de probabilidad, nos permite saber qué resultados obtendremos de los experimentos que realizamos bajo las mismas condiciones experimentales. Esta consideración tiene tanto que ver con la función de distribución clásica $f(t; p, q)$ como con la matriz de densidad cuántica $\mathbf{r}(t; p, q')$. La probabilidad tiene alguna clase de realidad que no puede ser negada. Ahora bien, ¿cómo hacer inteligible el carácter objetivo de la probabilidad que Born defiende?

Sabemos que la probabilidad, desde el momento en que va unida a la función

⁶⁰ Born, M. (1958): "Der Realitätsbegriff in der Physik", *Veröff. d. Arbeitsgem. f. Forsch. d. Landes Nordrh.-Westf.*, 80. p. 13.

⁶¹ Born, M.: (1950) "Physics and metaphysics", *Memoirs and proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society. Session 1949-1950*. Manchester. p. 15-16.

⁶² Born, M.: (1964) *Natural Philosophy of Cause and Chance*. p. 106.

de onda, no es una mera ficción matemática sino algo poseedor de algún tipo de realidad física, ya que se desarrolla en un tiempo y se propaga en un espacio de acuerdo con la ecuación de Schrödinger⁶³. Esto es, en la teoría clásica el cuadrado de la amplitud de onda expresa un estado físico real, mientras que ahora el cuadrado de la función de onda únicamente se refiere a la probabilidad de encontrar las partículas en un volumen dado o en un estado dado. Resulta así que, en la interpretación de Born de la función de onda de Schrödinger, las ondas de la mecánica ondulatoria, como previamente hemos analizado, se convierten en ‘ondas de probabilidad’. De esta manera, la reiterada repetición de un experimento nos permite fijar la probabilidad de un resultado y, en consecuencia, su carácter invariante dentro de unas mismas condiciones experimentales. Podemos afirmar, pues, que en el caso de las ondas el criterio de realidad objetiva se aplica a la probabilidad. Las ondas de probabilidad son invariantes y, en consecuencia, reales.

Y, ¿cuál es el siguiente paso a dar teniendo en cuenta todo lo expuesto? Afirmer que las ondas de probabilidad son reales porque tienen el carácter de una invariante de observación. Sin embargo, resulta necesario matizar una cuestión. El criterio de invariancia del que hace uso Born al referirse a las ondas de probabilidad no es el mismo que el que aplica a la masa, la carga y el spin de las partículas, esto es, a las propiedades poseídas por los sistemas con valor asignable en todo tiempo al margen del contexto experimental. Reconocemos que, como ya hemos visto, Born consigue compatibilizar la dualidad onda-corpúsculo gracias al concepto de probabilidad. En su planteamiento se emplea el concepto de partícula para hacer referencia a objetos a través de observables, unos poseídos por el sistema y otros latentes, y se precisa del concepto de onda para determinar la probabilidad de que un observable tenga uno de los valores posibles en caso de que una medida se lleve a cabo. Así cabe decir que no hay relación de exclusión entre el aspecto corpuscular y ondulatorio de los fenómenos, que esta dualidad no integra elementos incompatibles. Ahora bien, hemos de tener presente que el primero de estos cobra un mayor protagonismo.

Aunque la invarianza como criterio de realidad proporciona un principio de objetividad en nuestra opinión indudablemente ventajoso para el quehacer científico, la *probabilidad* se convierte en sus manos en una pieza clave tan real como inteligible. Las ondas describen un estado, es decir, toda la situación experimental, mientras que las partículas son los objetos propios de la investigación. Las funciones de onda representan, a través de sus cuadrados, probabilidades. Consecuentemente, la probabilidad tiene un cierto tipo de realidad que no puede ser negada, aunque ni siquiera pueda ser, a nuestros ojos, concebible de forma más o menos intuitiva.

⁶³ Jammer, M.: (1989) *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*. p. 303.

Concluyendo, creemos haber dado cuenta de los objetivos planteados al comienzo de este artículo. En primer lugar, hemos mostrado que, si bien es verdad que Born elabora una interpretación que contribuirá a la elaboración de una nueva manera de entender el proceder científico fuera de los presupuestos clásicos defensores a ultranza de un férreo determinismo, esto no supone un abandono del principio de causalidad ya que observamos cómo la conexión necesaria entre fenómenos permanece vigente y justificando la tan necesaria legalidad científica. En un segundo momento, hemos comprobado cómo la filosofía de Born se desmarca de cualquier interpretación positivista propugnando una concepción de la ciencia que no abandona su afán de objetividad, de búsqueda de leyes objetivas desentrañables, defendiendo una concepción de lo real reformulada como la posibilidad de aceptación intersubjetiva de toda aportación teórica avalada por datos experimentales. Sin perder de vista que los planteamientos cuánticos presuponen un papel irreductible para él, hemos sido partícipes de cómo Born más que ofrecer una descripción absoluta de la realidad, nos invita a aceptar una visión cabal, por compartida y aceptada por la comunidad científica, de determinados hechos estudiados. Así sostenemos que, a raíz de su legado, podemos defender una suerte de *fenomenismo* que modifica los compromisos ontológicos tradicionales, ya que redefine la ‘realidad’ de los objetos a partir de sus invariantes de observación construyendo una ‘realidad débil’. Así Born da cumplida solución a esa aporética imagen dual de la realidad, si bien es verdad, como ya hemos visto, que primando el aspecto corpuscular frente al ondulatorio.

Ahora bien, llegados al final de esta breve disertación, surgen todavía cuestiones no resultadas, planteamientos que se encuentran pendientes de ulterior explicación. Pensemos en su noción de probabilidad objetiva. Ya nos resulta difícil concebir que un electrón venga determinado por su carga o su spin y no por su posición o su momento (y que sean aquellos observables y no estos los que lo definan ‘objetivamente’), pero sí comprendemos que se trate de una suerte de ‘realidad física’. No ocurre así con la probabilidad que establece Born. ¿Somos capaces de hacer de ella algo inteligible, algo intuitivamente imaginable? Mucho nos tememos que no. La probabilidad tal y como es entendida por Born, aunque no pueda ser definida sino como algo real, abandona el ámbito de nuestra inteligibilidad.

Bibliografía

Obras citadas

Bohr, N. (1913): “On the constitution of atoms and molecules”, *Philosophical Magazine* 26. p.p. 1-25, 476-502, 857-875.

- Born, M.: (1924) “Über Quantenmechanik”, *Zeitschrift für Physik* 26, p.p. 379-395.
- Born, M. y Jordan, P. (1925): “Zur Quantenmechanik”, *Zeitschrift für Physik* 34, p.p. 858-888.
- Born, M., Heisenberg, W. y Jordan, P.: (1926) “Zur Quantenmechanik II”, *Zeitschrift für Physik* 35, p.p. 557-615.
- Born, M.: (1926) “Zur Quantenmechanik der Stossvorgänge”, *Zeitschrift für Physik* 37, p.p. 863-867.
- Born, M.: (1926) “Quantenmechanik der Stossvorgänge”, *Zeitschrift für Physik* 38, p.p. 803-827.
- Born, M.: (1926) “Zur Wellenmechanik der Stossvorgänge”, *Göttinger Nachrichten* 1926, p.p. 146-160.
- Born, M.: (1950) “Physics and metaphysics” en *Memoirs and proceedings of the Manchester literary and philosophical society. Session 1949-1950*. Manchester.
- Born, M.: (1955) *Continuity, determinism and reality*. Dan. Mat. Medd. 30, n° 2.
- Born, M.: (1956) *Experiment and Theory in Physics*. Dover Publications, USA.
- Born, M. (1958): “Der Realitätsbegriff in der Physik” en *Veröff. d. Arbeitsgem. f. Forsch. d. Landes Nordrh.-Westf.*, 80.
- Born, M.: (1960) *El inquieto universo*. EUDEBA. Buenos Aires.
- Born, M.: (1961) “Bemerkungen zur statistischen Deutung der Quantenmechanik”, *Werner Heisenberg und die Physik unserer Zeit*. Vieweg, Braunschweig. p.p. 103-108.
- Born, M.: (1961) “Bemerkungen zur statistischen Deutung der Quantenmechanik” en *Werner Heisenberg und die Physik unserer Zeit*. Vieweg, Braunschweig. p.p. 103-108.
- Born, M.: (1964) *Natural Philosophy of Cause and Chance*. Dover Publications. Nueva York.
- Born, M.: (1969) *Atomic Physics*. Londres: Blackie and Son Ltd.
- Born, M.: (1970) *Physics in my generation*. Springer-Verlag. Nueva York.
- Born, H. y M. y Einstein, A.: (1973) *Correspondencia 1916-1955*. Méjico: Siglo XXI Editores.
- Born, M.: (1978) *My life. Recollections of a Nobel Laureate*. Charles Scribner's Sons. Nueva York.
- Davisson, C. y Germer, L.: (1927) “Diffraction of electrons by a crystal of nickel”, *Physical Review* 30, p.p. 705-740.
- Davisson, C. y Kunsman, C. H.: (1923) “The scattering of low speed electrons by platinum and magnesium”, *Physical Review* 22, p.p. 242-258.
- de Broglie, L.: (1922) “Sur les interférences et la théorie des quanta de lumière”, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* 175, p.p. 811-813.
- de Broglie, L.: (1922) “Rayonnement noir et quanta de lumière”, *Journal de Physique et le radium* 3, p.p. 422-428.

- de Broglie, L.: (1923) “Ondes et quanta”, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* 177, p.p. 507-510.
- de Broglie, L.: (1923) “Quanta de lumière, diffraction et interférences”, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* 177, p.p. 548-550.
- de Broglie, L.: (1923) “Les quanta, la théorie cinétique des gaz et le principe de Fermat”, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* 177, p.p. 630-632.
- de Broglie, L.: (1924) “A tentative theory of light quanta”, *Philosophical Magazine* 47, p.p. 446-458.
- de Broglie, L.: (1924) *Recherches sur la théorie des quanta*. Paris: Masson.
- de Broglie, L. : (1925) “Recherches sur la théorie des quanta”, *Annales de Physique* 3, p.p. 22-128.
- de Broglie, L.: (1926) “Sur la possibilité de relier les phénomènes d'interférence et de diffraction à la théorie des quanta de lumière”, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* 183, p.p. 447-448.
- de Broglie, L.: (1927) “La mécanique ondulatoire et la structure atomique de la matière et du rayonnement”, *Journal de Physique et du Radium* 8, 225-241.
- de Broglie, L.: (1927) “La structure atomique de la matière et du rayonnement et la mécanique ondulatoire”, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* 184, p.p. 273-274.
- de Broglie, L.: (1952) *Louis de Broglie: un itinéraire scientifique*. Textes réunis et présentés per Georges Lockak. Paris: Éditions La Découverte, 1987.
- Einstein, A.: (1905) “Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt”, *Annalen der Physik* 17, p.p. 132-148.
- Einstein, A.: (1909) “Über die Entwicklung unserer Anschauungen über das Wesen und die Konstitution der Strahlung”, *Physikalische Zeitschrift* 10, p.p. 817-825.
- Heisenberg, W.: (1925) “Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen”, *Zeitschrift für Physik* 33, p.p. 879-893.
- Icaza, J. J.: (1991) *La construcción de la mecánica cuántica*. Bilbao: Servicio Editorial UPV.
- Jammer, M.: (1974) *The Philosophy of Quantum Mechanics. The Interpretations of Quantum Mechanics in Historical Perspective*. USA: John Wiley & Sons.
- Jammer, M.: (1989) *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*. USA: Tomash Publishers.
- Planck, M.: (1900) “Über irreversible Strahlungsvorgänge”, *Annalen der Physik* 1, p.p. 69-122.
- Schrödinger, E.: (1926) “Quantisierung als Eigenwertproblem” (Primera comunicación), *Annalen der Physik* 79, p.p. 361-376; (1926) “Quantisierung als Eigenwertproblem” (Segunda comunicación), *Annalen der Physik* 79, p.p. 489-

- 527; (1926) “Quantisierung als Eigenwertproblem” (Tercera comunicación), *Annalen der Physik* 80, p.p. 437-490; y (1926) “Quantisierung als Eigenwertproblem” (Cuarta comunicación), *Annalen der Physik* 81, p.p. 109-139.
- Schrödinger, E.: (1926) “Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen”, *Annalen der Physik* 79, p.p. 734-756.
- Thomson, G. P. y Reid, A. (1927) “Diffraction of cathode rays by a thin film”, *Nature* 119, p. 890.
- Thomson, G. P. (1927) “The diffraction of cathode rays by thin films of platinum”, *Nature* 120, p. 802.
- Thomson, G. P. (1928) “Experiments on the diffraction of cathode rays”, *Proceedings of the Royal Society of London (A)*, 119, p.p. 600-609.

Otros textos de interés

- Dürr, S.; Rempe, G.: (2000) “Can wave-particle be based on the uncertainly relation?”, *American Journal of Physics*, 68 (11). p.p. 1021-1024.
- Fuertes, J. F.: (1995) “Max Born y el caos determinista”, *Revista Española de la Física*, 9, p.p. 48-54.
- Loewer, B.: (2001) “Determinism and chance”, *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 32 (4). p.p. 609-620.
- Rioja, A.: (1995) “La dualidad onda-corpúsculo en la filosofía de Max Born”, *Thémata. Revista de Filosofía*, 14, p.p. 251-284.
- Twardy, C. R.; Karb, K. B.: (2004) “A criterion of probabilistic causation”, *Philosophy of Science*, 71 (3). p. 241-263.
- Shirai, H.: (1998) “Reinterpretation of Quantum Mechanics based on the Statistical Interpretation”, *Foundations of Physics*, 28 (11). p.p. 1633-1662.