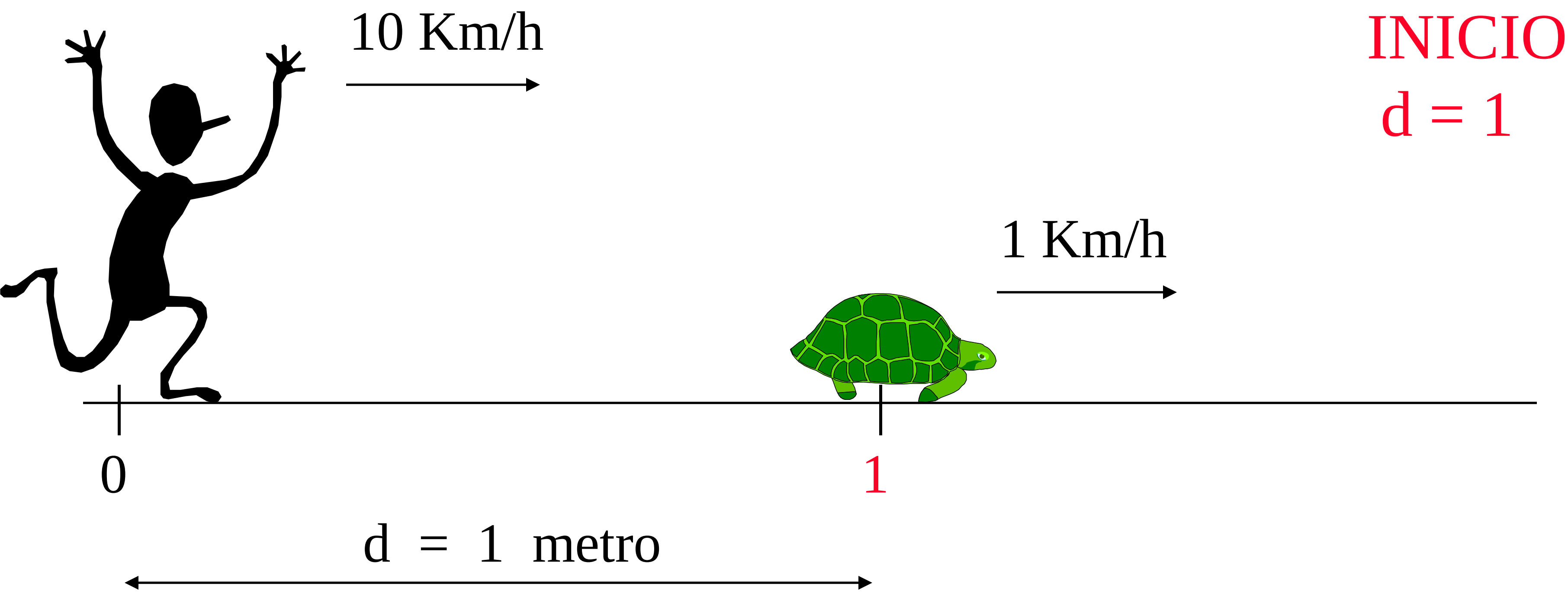
Paradojas del infinito

por Julio Bernués

Paradojas del infinito

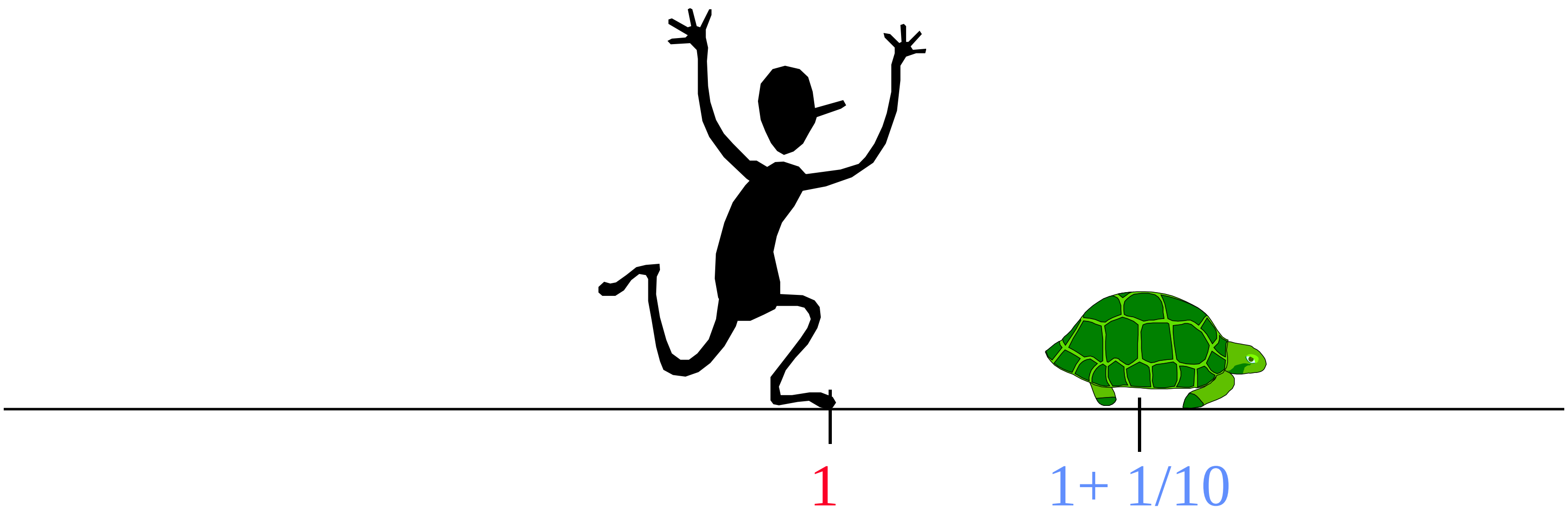
- 1. Paradoja de Zenon.
- 2. Paradoja de Hilbert
- 3. Paradoja de Banach-Tarski.
- 4. (Paradoja de Russell)

1.PARADOJA DE ZENON



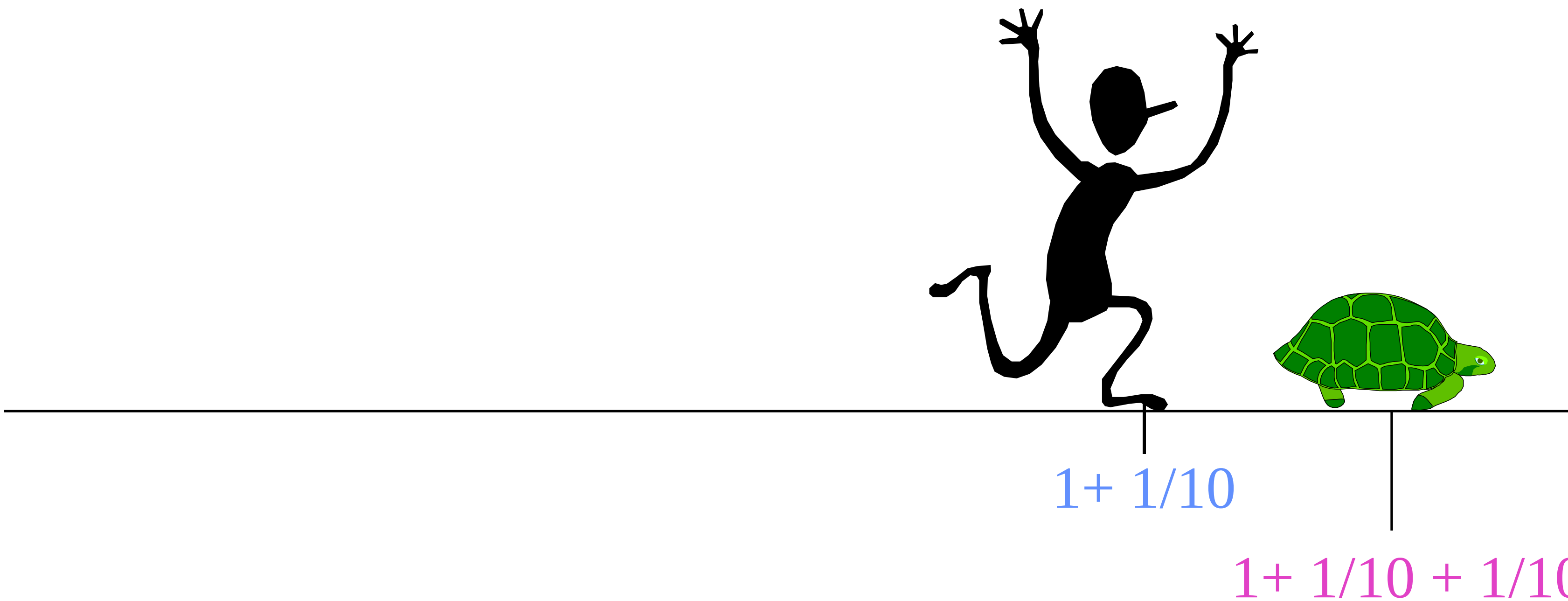
PASO 1

$d = 1/10$



PASO 2

$d = 1/10^2$



PASO 3

$d = 1/10^3$

1+ 1/10 + 1/100

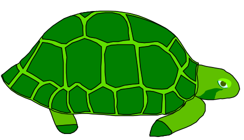
1 + 1/10+ 1/100 + 1/1000

... Y así indefinidamente:

NUNCA LA ALCANZA !!!

SOLUCION MATEMATICA

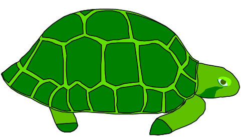
0	1	1+1/10	$1+1/10+1/10^2$	$1+1/10+1/10^2+1/10^3$	...
0	1	1´1	1’11	1´111	...



1	1+1/10	$1+1/10+1/10^2$	$1+1/10+1/10^2+1/10^3$	$1+1/10+1/10^2+1/10^3+1/10^4$	...
1	1´1	1’11	1’111	1’1111	...

SOLUCION MATEMATICA

0	1	$1+1/10$	$1+1/10+1/10^2$	$1+1/10+1/10^2+1/10^3$	...
0	1	1´1	1’11	1´111	...



1	$1+1/10$	$1+1/10+1/10^2$	$1+1/10+1/10^2+1/10^3$	$1+1/10+1/10^2+1/10^3+1/10^4$	...
1	1´1	1’11	1’111	1’1111	...

SE JUNTAN EN:

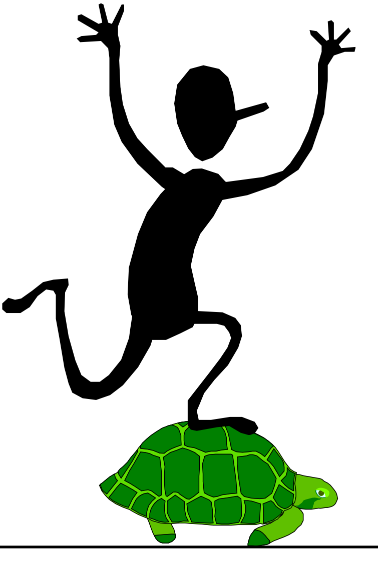
$1+1/10+1/10^2+1/10^3+1/10^4+\ldots$ = 1´1111111111..... = 10/9

PROCESO INFINITO...

... PERO LA ALCANZA

PASO 35

$d = 1/10^{35}$



SOLUCION FISICA

- LA DISTANCIA NO ES INFINITAMENTE DIVISIBLE.
- EL TIEMPO NO ES INFINITAMENTE DIVISIBLE
- EL PROCESO ES FINITO : LA ALCANZA

SOLUCION FISICA

- LA DISTANCIA NO ES INFINITAMENTE DIVISIBLE.
- EL TIEMPO NO ES INFINITAMENTE DIVISIBLE.
- EL PROCESO ES FINITO : LA ALCANZA.

$d = 1/10^{35}$ CONSTANTE O LONGITUD DE PLANCK

¿El espacio - tiempo deja de existir?

- LOS NUMEROS REALES SI SON INFINITAMENTE DIVISIBLES

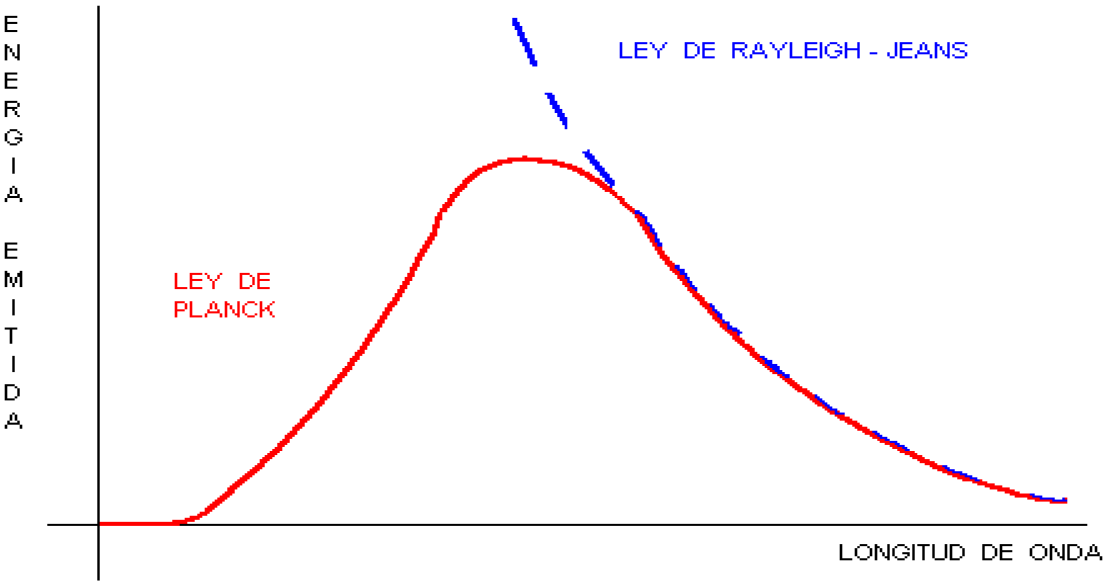
- PERO LOS NUMEROS REALES (positivos) SON UN MODELO MATEMATICO DE TIEMPO Y DISTANCIA

Modeliza algo no infinitamente divisible con algo que sí lo es:

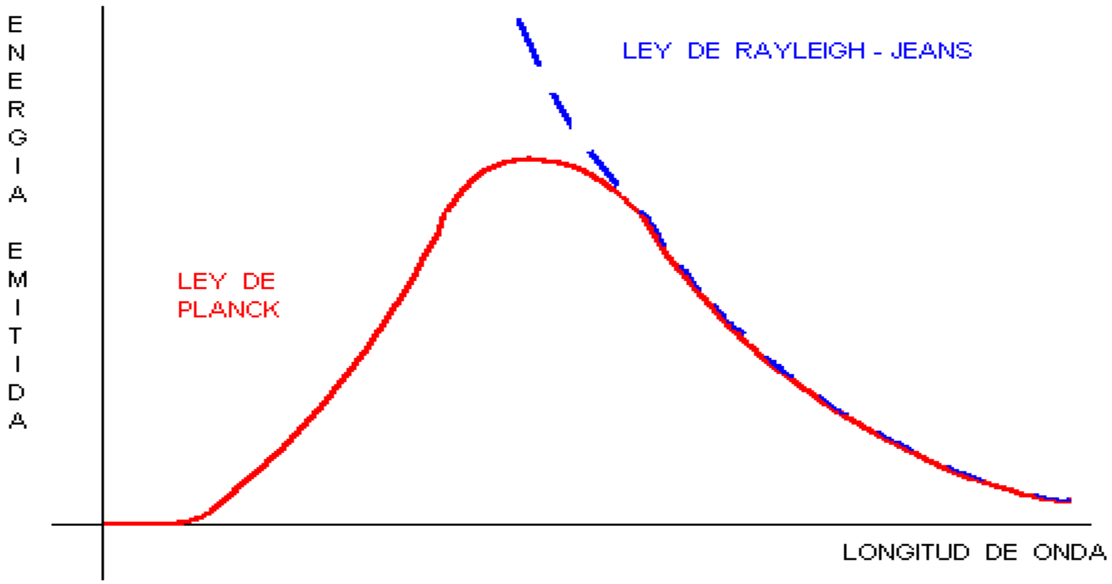
A escala pequeña traerá problemas ...

Por ejemplo:

LEY DE RAYLEIGH - JEANS



CATASTROFE ULTRAVIOLETA



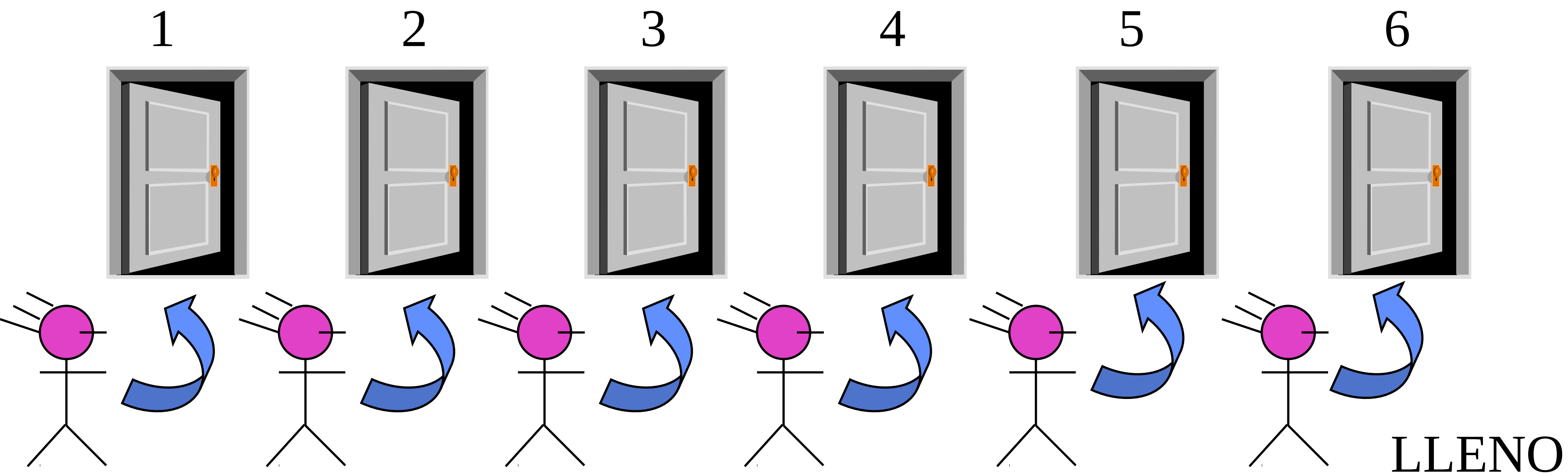
CATASTROFE ULTRAVIOLETA

- TEORIA CUANTICA DE PLANCK

  "Un cuerpo caliente sólo puede arrojar números enteros de cuantos de energía"

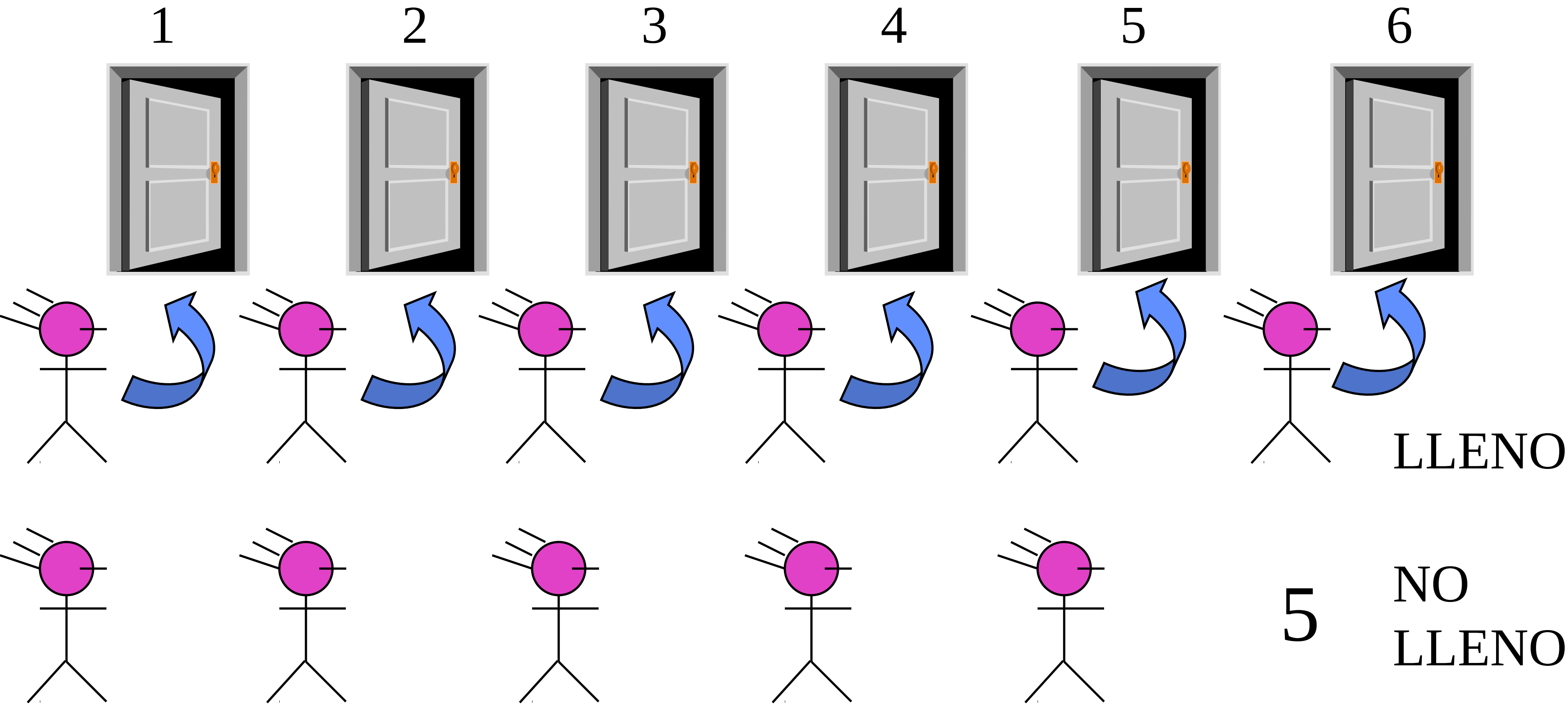
A escala pequeña la "matemática clásica" falla.

2. PARADOJA DEL HOTEL DE HILBERT

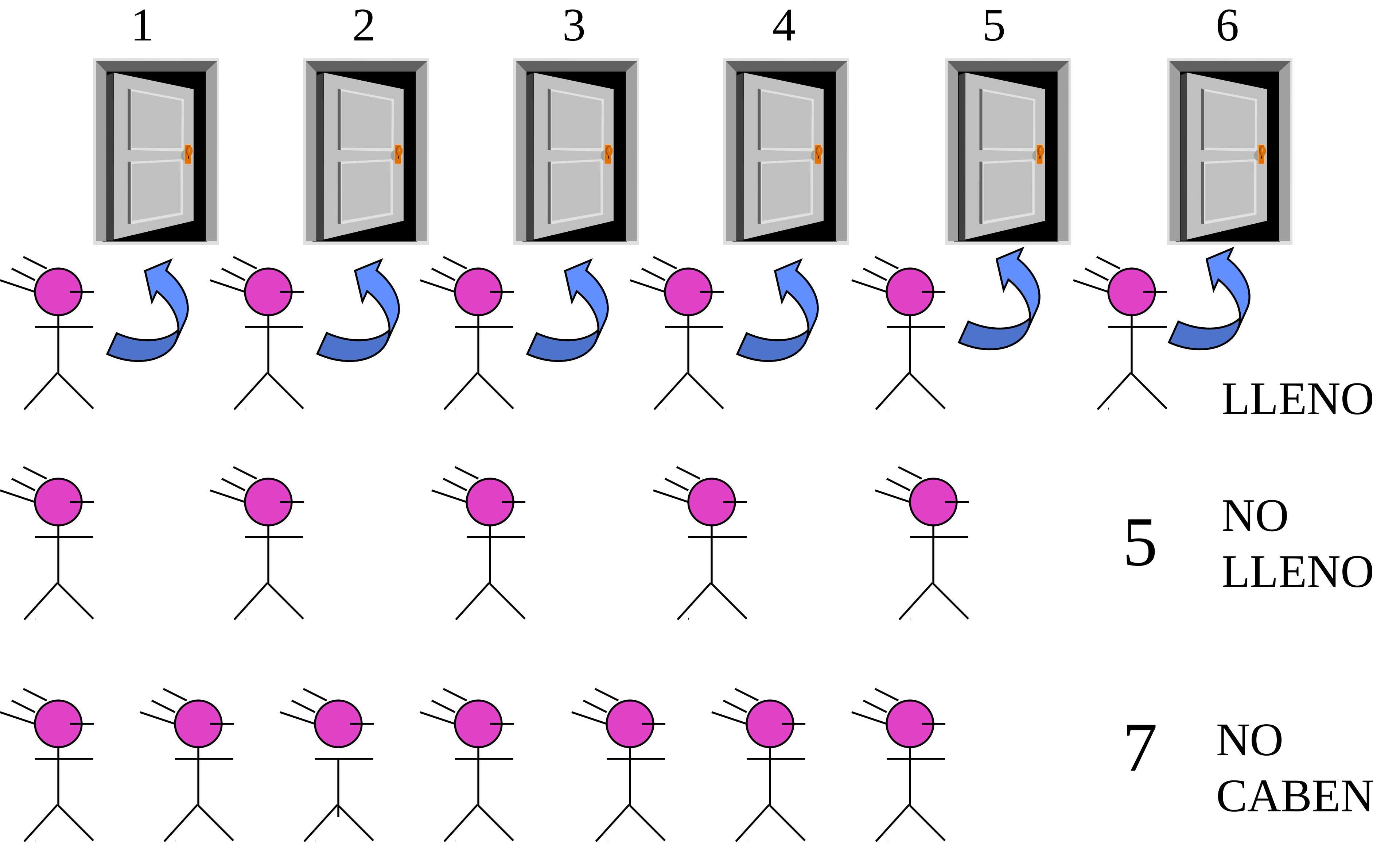


A cada habitación le corresponde un cliente y a cada cliente una habitación (aplicación biyectiva)

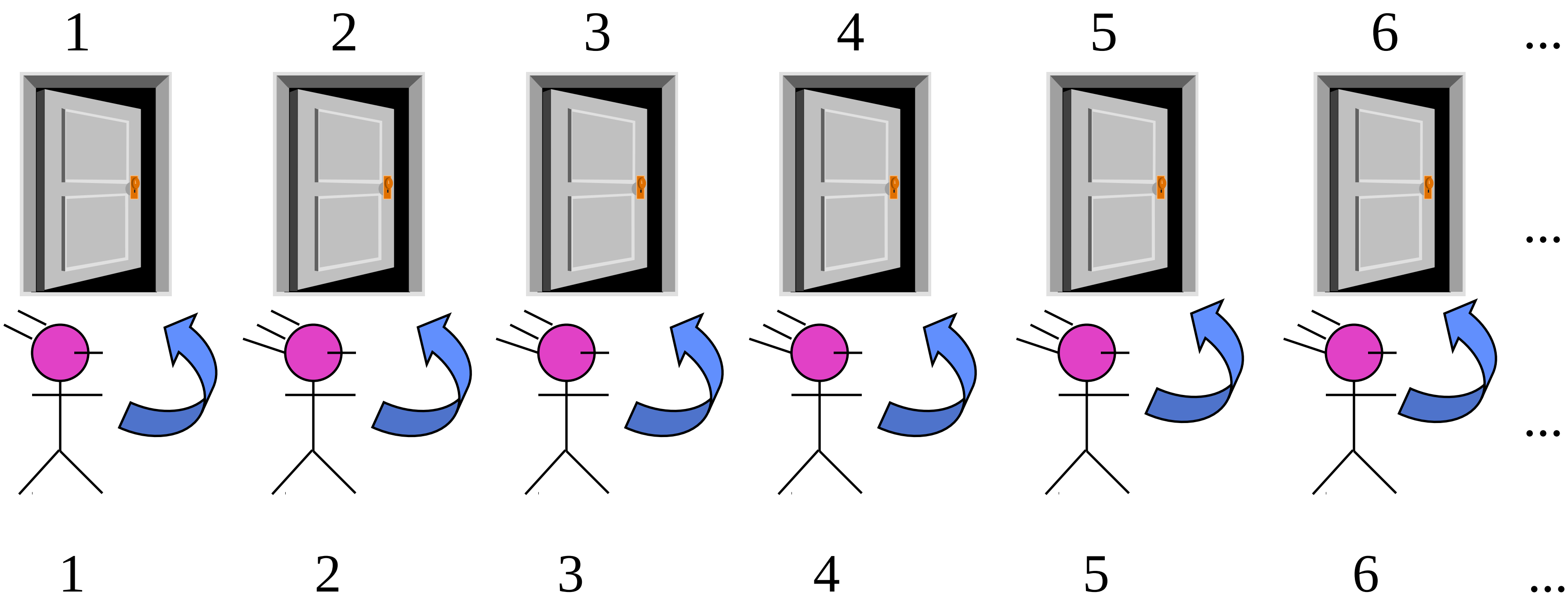
2. PARADOJA DEL HOTEL DE HILBERT



2. PARADOJA DEL HOTEL DE HILBERT



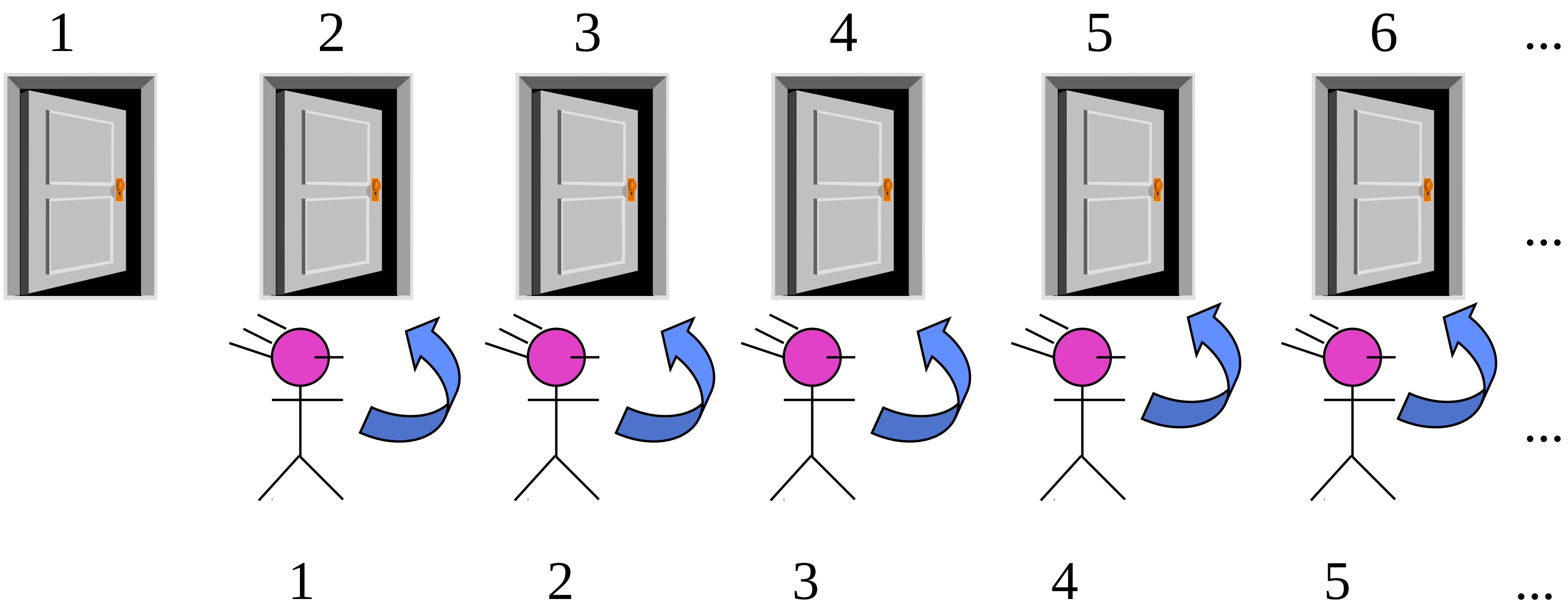
El hotel de Hilbert tiene un número infinito de habitaciones {1, 2, 3, 4,... }



Si está lleno, un cliente más, ahora SI cabe:

los demás no tienen más que “avanzar 1”

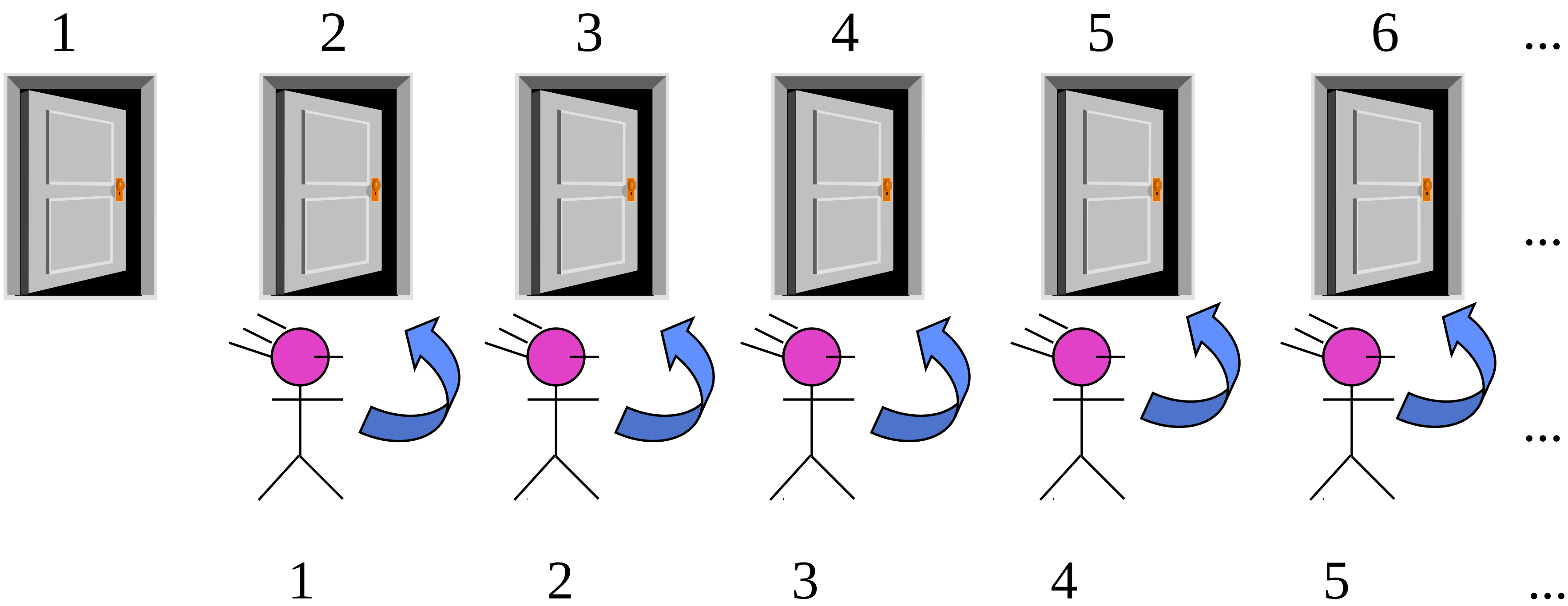
El hotel de Hilbert tiene un número infinito de habitaciones {1, 2, 3, 4,... }



Si está lleno, un cliente más, ahora SI cabe:

los demás no tienen más que “avanzar 1”

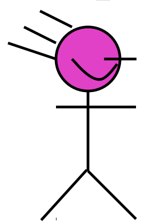
El hotel de Hilbert tiene un número infinito de habitaciones {1, 2, 3, 4,... }



Si está lleno, un cliente más, ahora SI cabe:

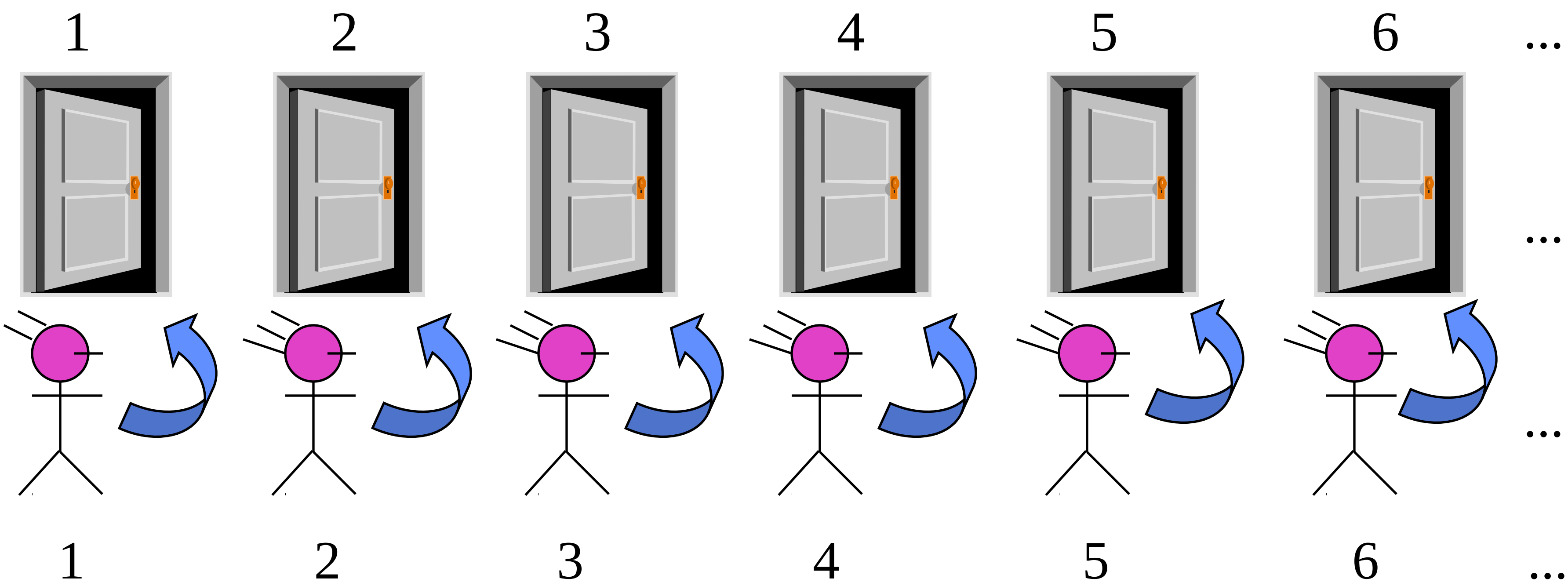
los demás no tienen más que “avanzar 1”

Y cabe uno más



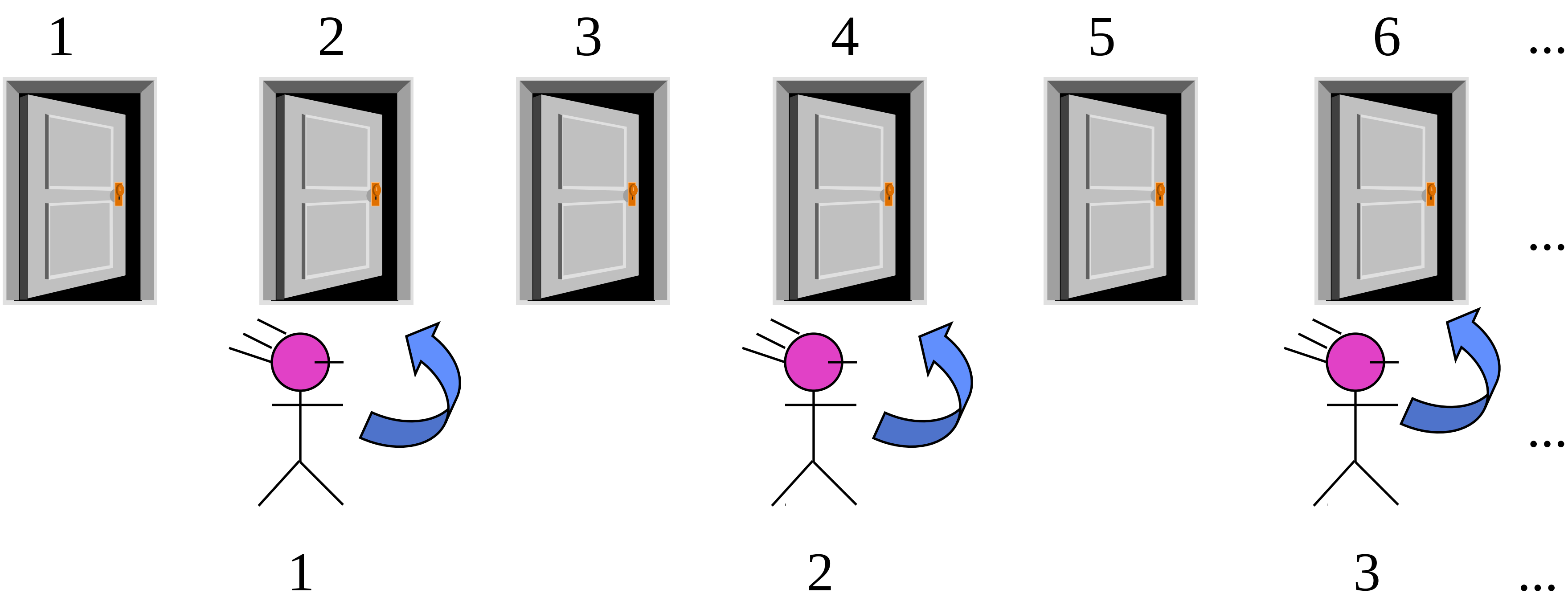
(ó 2, ó 3 ...)

De hecho en el hotel infinito de Hilbert, cuando está lleno, caben infinitos clientes más.



El cliente n va a la habitación 2n y aún caben infinitos nuevos clientes

De hecho en el hotel infinito de Hilbert, cuando está lleno, caben infinitos clientes más.



El cliente n va a la habitación 2n y aún caben infinitos nuevos clientes

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 ...

1 3 5 7 9 11 ...

2 4 6 8 10 12 ...

(Biyectiva)

$$2n - 1 \longleftrightarrow n$$

$$2n \longleftrightarrow n$$

(Biyectiva)

1 2 3 4 5 6 ...

1 2 3 4 5 6 ...

Hemos duplicado los números naturales (usando aplicaciones biyectivas)

DAVID HILBERT

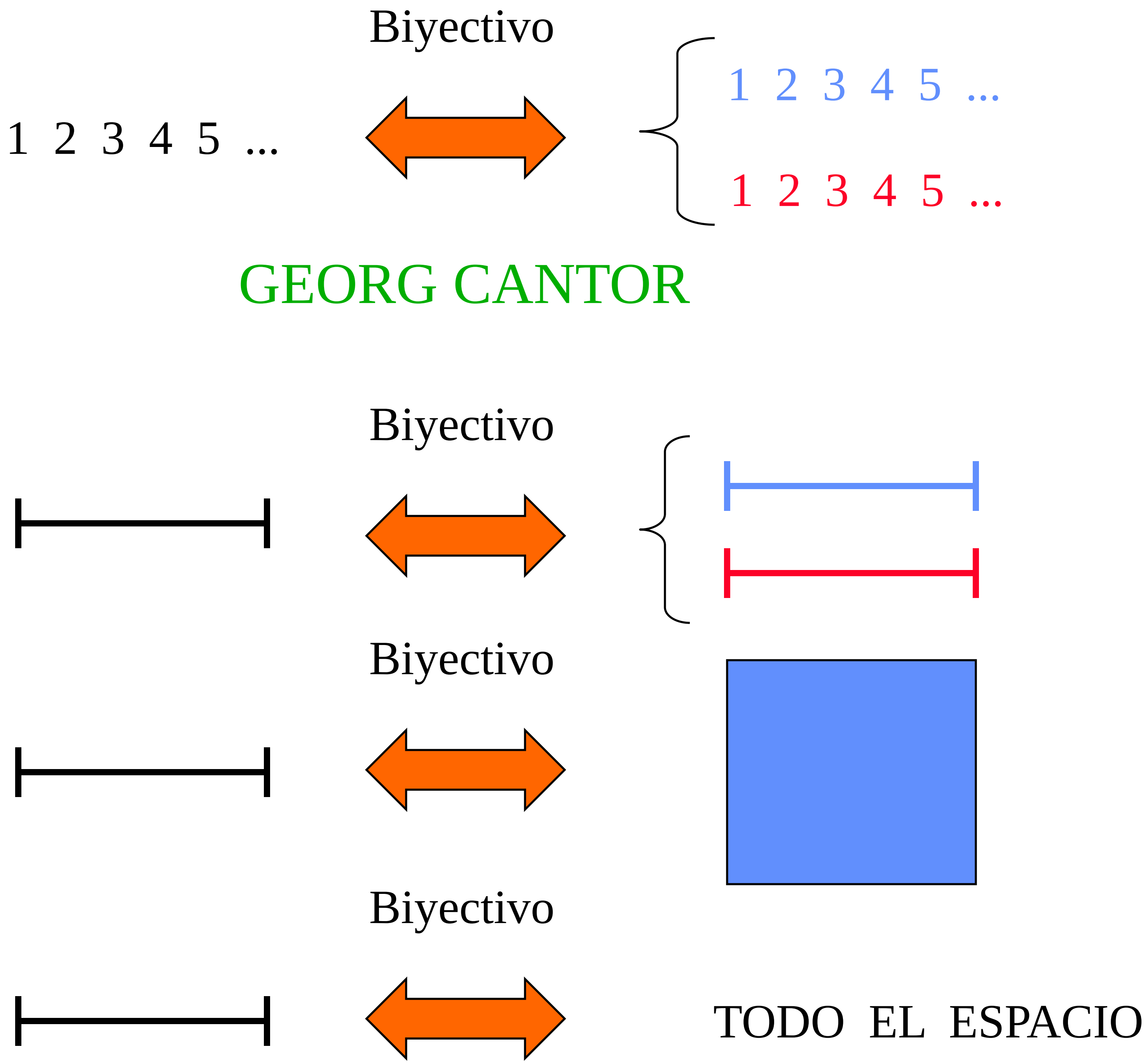
23 de Enero 1862 (Königsberg)
14 de Febrero 1943 (Göttingen)

Es posible dividir el conjunto de los números naturales en dos mitades, cada una de ellas tiene el mismo número de elementos que el total.

GALILEO GALILEI

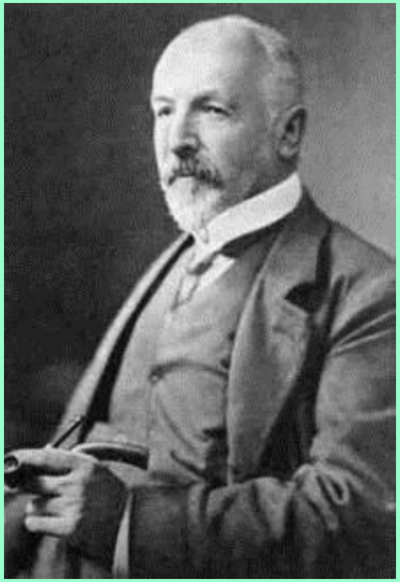
15 de Febrero 1564 (Pisa)
8 de Enero 1642 (Arcetri)

Los atributos "igual", "mayor", "menor" no son aplicables a cantidades infinitas. Lo infinito es intrínsecamente incomprensible.


Biyectivo
1 2 3 4 5 ...
1 2 3 4 5 ...
1 2 3 4 5 ...
GEORG CANTOR
Biyectivo
Biyectivo
Biyectivo
TODO EL ESPACIO

GEORG CANTOR 3 de Marzo 1845 (St Petersburg)

6 de Enero 1918 (Halle)



“Lo veo pero no lo creo”

HENRI POINCARE 29 de Abril 1854 (Nancy)

17 de Julio 1912 (Paris)

“La teoría de Cantor es una enfermedad de la que la matemática tendría que recuperarse”

3. PARADOJA DE BANACH -TARSKI

STEFAN BANACH

30 de Marzo 1892 (Kraków)
31 de Agosto 1945 (Lvov)

ALFRED TARSKI

14 de Enero 1902 (Warsaw)
26 de Octubre 1983 (Berkeley)

- Es posible hacer un puzzle a partir de una bola y con las piezas componer dos bolas de idéntico tamaño a la de partida.

- Es posible hacer un puzzle a partir de una bola del tamaño de un guisante y con las piezas componer una bola del tamaño del sol.

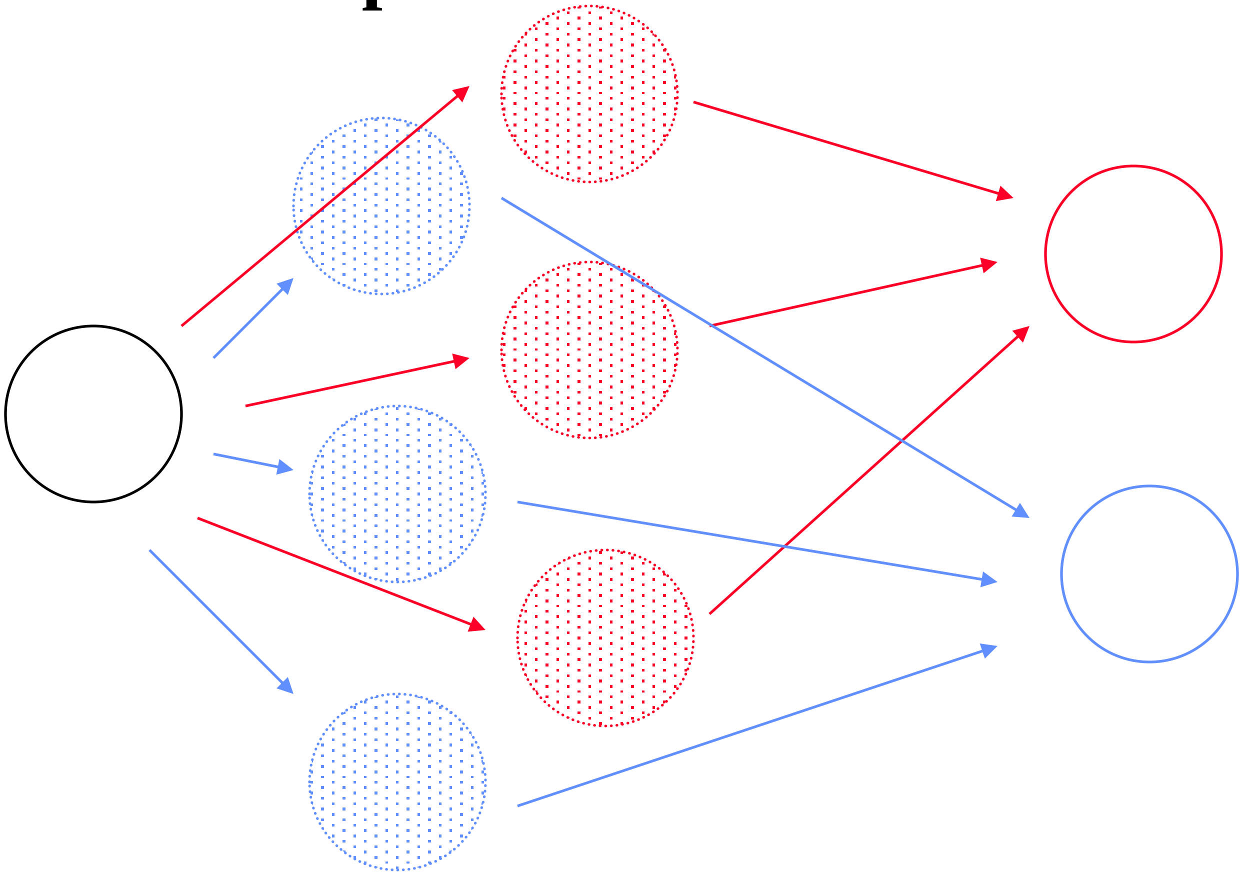
- Es posible hacer un puzzle a partir de una bola y con las piezas componer dos bolas de idéntico tamaño a la de partida.

- Es posible hacer un puzzle a partir de una bola del tamaño de un guisante y con las piezas componer una bola del tamaño del sol.

(No sobran ni faltan piezas, ni se solapan)

Para duplicar una bola bastan 18 piezas.

¿Cómo son esas piezas?



Son “nubes” de un número infinito de puntos.
Imposibilidad técnica de construirlos...

...¿sólo eso?

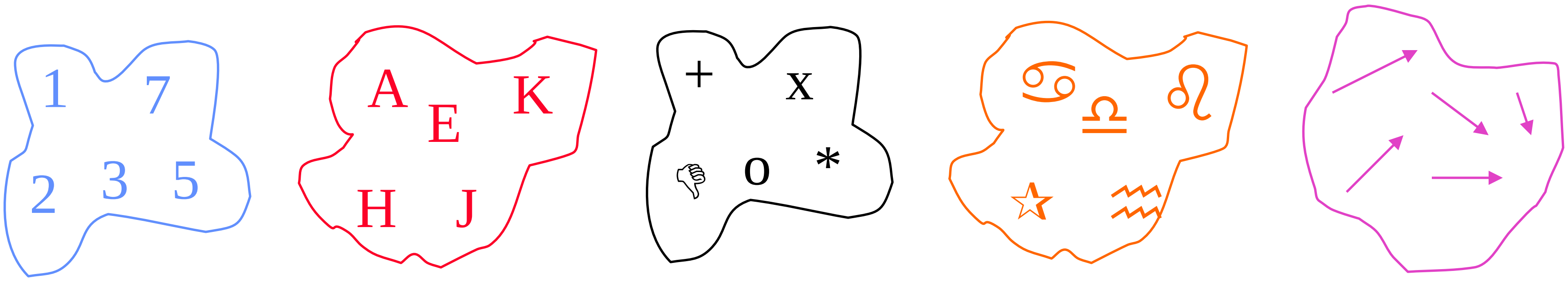
Cada pieza del puzzle es un subconjunto de la bola.

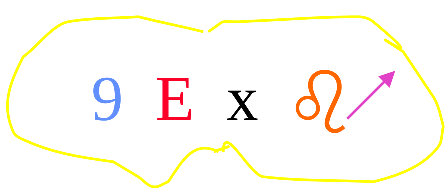
Cada conjunto se obtiene empleando una herramienta:

Cada pieza del puzzle es un subconjunto de la bola.

Cada conjunto se obtiene empleando una herramienta:

EL AXIOMA DE ELECCION



Entonces: 

es un conjunto

¿Qué se admite como conjunto y qué no? ¿Qué es un conjunto?

El axioma de elección permite construir el puzzle que duplica la bola.

Aún así,

El axioma de elección permite construir el puzzle que duplica la bola.

Aún así,

¿NO DEBERIA CONSERVARSE
EL VOLUMEN Y LA MASA?

En 1904 H. Lebesgue definió rigurosamente la noción de volumen.

(Se sigue usando hoy en día)

No es posible asociar a cada subconjunto del espacio un volumen. Hay conjuntos que se pueden medir (todos los que manejamos habitualmente) pero también hay conjuntos que no se pueden medir (conjuntos no-medibles).

Las piezas del puzzle que el axioma de elección construye son no medibles.

Con éllas NO TIENE SENTIDO hablar de la conservación del volumen.

(Mateo 14, 15-21)

Jesús de Nazaret: "... Tomad estos cinco panes y dos peces y dad de comer a esos que nos siguen".

Discípulos: "Maestro, ¿podemos usar el axioma de elección?"

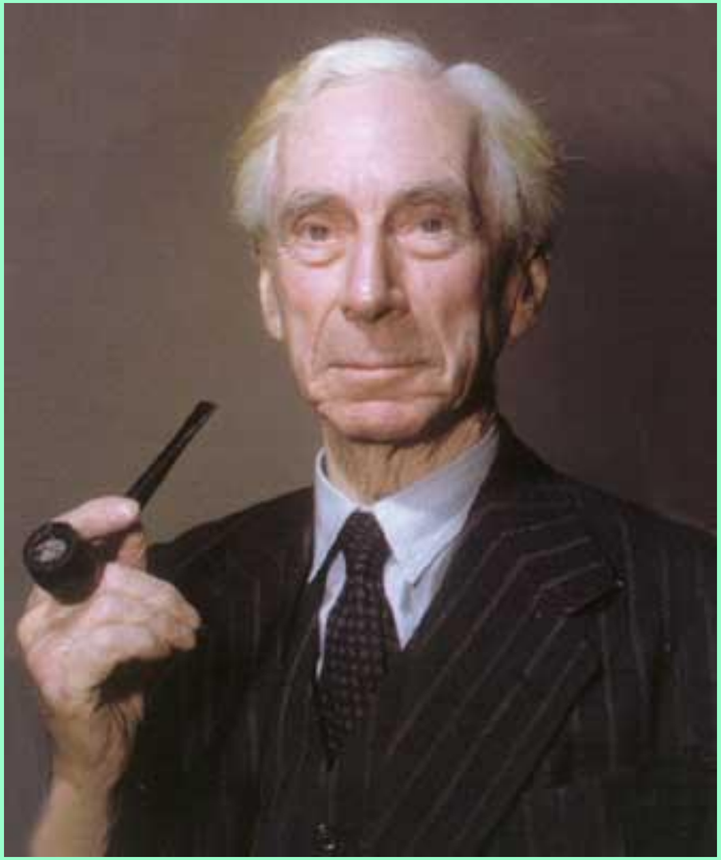
(Adaptación por el matemático H. Weyl)

(4.PARADOJA DE RUSSELL)

BERTRAND RUSSELL

18 de Mayo 1872 (Ravenscroft)

2 de Febrero 1970 (Penrhyndeudraeth)



CATÁLOGOS QUE SE CATALOGAN A SÍ MISMOS

Catálogo

Catálogo

Catálogo

Catálogo

CATÁLOGOS QUE NO SE CATALOGAN A SÍ MISMOS

Catálogo

Catálogo

Catálogo

CATÁLOGOS QUE SE CATALOGAN A SÍ MISMOS

Catálogo

Catálogo

Catálogo

Catálogo

CATÁLOGOS QUE NO SE CATALOGAN A SÍ MISMOS

Catálogo

Catálogo

Catálogo

EL CATÁLOGO DE TODOS LOS CATÁLOGOS QUE NO SE CATALOGAN A SÍ MISMOS...

SUPER CATÁLOGO

CATÁLOGOS QUE SE CATALOGAN A SÍ MISMOS

Catálogo

Catálogo

Catálogo

Catálogo

CATÁLOGOS QUE NO SE CATALOGAN A SÍ MISMOS

Catálogo

Catálogo

Catálogo

EL CATÁLOGO DE TODOS LOS CATÁLOGOS QUE NO SE CATALOGAN A SÍ MISMOS...

SUPER CATÁLOGO

¿SE CATALOGA A SÍ MISMO?

SI ... IMPOSIBLE

NO ... IMPOSIBLE

Si se cambia la palabra “catálogo” por la de “conjunto” resulta que no “cualquier cosa” es un conjunto.

Hay que tener cuidado.

Russell define los conceptos matemáticos básicos y sus relaciones a partir de la lógica.

Un conjunto es una cadena de símbolos.

(La cadena $A \notin A$ NO es admisible).